Geodézie 3 (154GD3)

Téma č. 9: Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Úvod o měření obecně.

V geodézii měříme především délky, úhly, a dále také např. čas, velikost síly tíže apod. Výsledek měření je charakterizován číslem, závislým též na volbě jednotek.

Ze zkušenosti platí : opakuje-li se měření téže veličiny, tak i při sebevětší pečlivosti jsou získány obecně různé výsledky. Je to tím, že žádné měření nelze izolovat od mnoha rušivých vlivů, hlavně :

- nedokonalost našich smyslů,
- nedokonalost přístrojů,
- vnější vlivy,
- nedostatečná znalost všech okolností, které způsobují chyby měření atd.

Omezováním chyb např. využitím přesnějšího přístroje lze snížit jejich vliv, a tak zvýšit přesnost měření. Proměnlivé, velmi početné, a nejen proto v podstatě nepostižitelné vlivy určují číselně výsledek měření, který je v určitých mezích náhodnou (libovolnou a nepředvídatelnou) veličinou. Rozdílnost výsledků měření vyplývá z fyzikální podstaty prostředí.

Při měření a jeho zpracování je hledána nejspolehlivější hodnota výsledku měření, odhadována její přesnost a meze její spolehlivosti. Měřením či zpracováním měření NIKDY nezískáme skutečnou hodnotu veličiny, vždy se jedná o odhad.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Úvod o měření obecně.

Výsledek každého měření je nevyhnutelně zatížen skutečnou chybou ε, která je souhrnem působení jednotlivých vlivů. Skutečnou chybu měření ε_i lze vyjádřit pomocí skutečné (správné) hodnoty veličiny X a měřené hodnoty l_i:

$$\varepsilon_i = X - l_i$$

Chyby měření.

- hrubé chyby a omyly,

- nevyhnutelné
    - náhodné,
    - systematické.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Chyby měření.

Omyly nejsou způsobeny objektivními podmínkami měření, ale nesprávnými úkony měřiče (omyl, nepozornost, špatná manipulace s přístrojem apod.)

Hrubé chyby mohou vznikat nakupením nepříznivých vlivů nebo jejich neobvyklou velikostí jako např. silný vítr nebo vibrace obrazu cíle v dalekohledu.

Měření s těmito chybami jsou v příkrém rozporu s kontrolními měřeními - je nutné dvojí měření nebo měření nadbytečných hodnot. Nejsou chybami nevyhnutelnými a dále nejsou v rozborech a hodnoceních uvažovány.

Systematické chyby Vznikají z jednostranně působících příčin, za stejných podmínek ovlivňují měření ve stejném smyslu, tj. chyba měření má stejné znaménko i velikost.

- konstantní (při každém měření stejné znaménko i velikost, např. chybná délka pásma),
- proměnlivé (jejich vliv se mění v závislosti na podmínkách měření, např. na teplotě atmosféry apod., jejich vliv může mít i různá znaménka).

Systematické chyby je možno potlačit seřízením (rektifikací) přístrojů a pomůcek před měřením a vhodnou metodikou zpracování měření.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Chyby měření.

Náhodné chyby jsou takové chyby, které při stejné měřené veličině, metodě měření, podmínkách a pečlivosti, náhodně nabývají různé velikosti i znaménka. Jednotlivě nemají žádné zákonitosti a jsou vzájemně nezávislé, nepředvídatelné a nezdůvodnitelné.
Ve větších souborech (vícekrát opakované měření) se však již řídí jistými statistickými zákonitostmi. Náhodné chyby stejného druhu mají charakter náhodné veličiny s normálním rozdělením pravděpodobnosti.

Celková **náhodná chyba** měření je dána součtem velkého množství jednotlivých na sobě nezávislých náhodných chyb způsobených mnoha různými vlivy.

Podle centrální limitní věty (Věta Ljapunovova: rozdělení součtu vzájemně nezávislých veličin X_i konverguje k normálnímu rozdělení i v případě, že veličiny X_i nemají stejné rozdělení pravděpodobnosti.) je rozdělení pravděpodobnosti v takovémto případě **normální**.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Chyby měření.

Vlastnosti náhodných chyb měření:

- pravděpodobnost vzniku kladné či záporné chyby určité velikosti je stejná,
- malé chyby jsou pravděpodobnější (četnější) než velké,
- chyby nad určitou mez se nevyskytují (resp. považujeme je za hrubé).

Normální rozdělení.

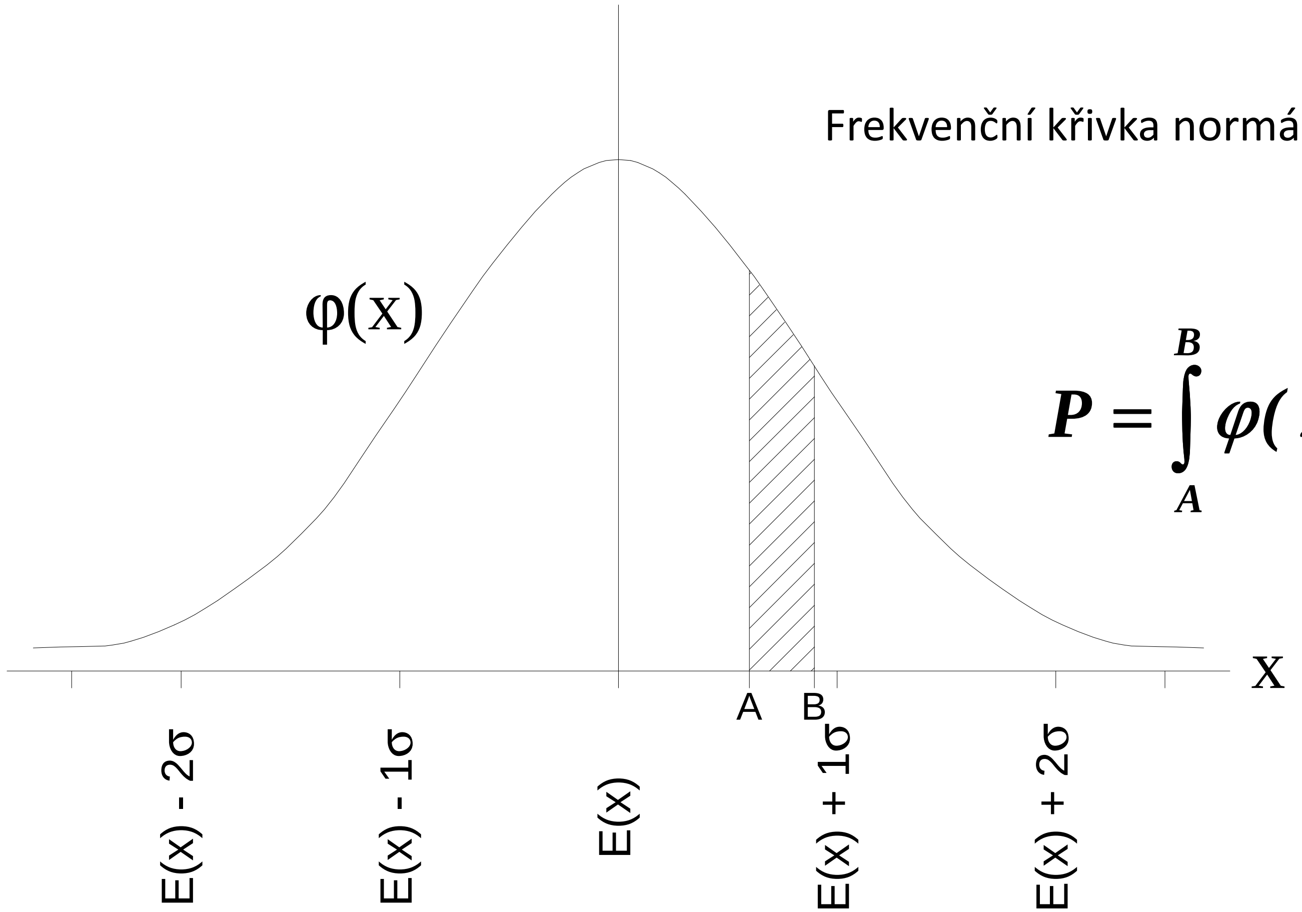
Hustota pravděpodobnosti $\varphi(x)$ (také frekvenční funkce) normálního rozdělení $N(E(x),\sigma^2)$ je dána stření hodnotou $E(x)$ a směrodatnou odchylkou σ:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\{x-E(x)\}^2}{2\sigma^2}}, \; x \in (-\infty, \infty).$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Normální rozdělení.

Pravděpodobnost P, že měření bude zatíženo chybou o velikosti padnoucí do intervalu <A;B> je rovna ploše vyšrafované v grafu.



$$P = \int_A^B \varphi(x)\,dx$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Normální rozdělení.

A	B	P
E(x) - σ	E(x) + σ	0,682
E(x) -2 σ	E(x) + 2 σ	0,954
E(x) -2,5 σ	E(x) +2,5 σ	0,988
E(x) – 3 σ	E(x) + 3 σ	0,997
E(x) – ∞	E(x) + ∞	1,000

Co to je směrodatná odchylka σ ?

Je to parametr popisující normální rozdělení. Ve vztahu k měření je to charakteristika přesnosti. Z hlediska chyb měření je třeba vždy tuto charakteristiku interpretovat s ohledem na předchozí tabulku, a tedy si uvědomit, že např. v intervalu <-2σ ; 2σ> od měřené hodnoty se vyskytuje hledaná hodnota geometrického parametru s pravděpodobností 95 % (za předpokladu, že měření mají normální rozdělení a nepůsobí systematická chyba).

Výsledkem vlivu náhodných a systematických chyb je skutečná chyba měření :

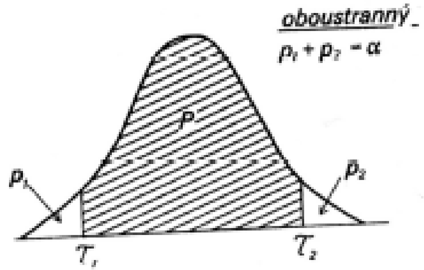
$$\varepsilon_i = \Delta_i + c_i$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Normální rozdělení.

Mezní odchylka δ:

Symetrická hodnota vymezující interval, mimo tento interval považujeme chyby za hrubé.



$$\delta = u_p \cdot \sigma$$

u_p je hodnota normovaného normálního rozdělení, jinak také koeficient spolehlivosti. Volí se obvykle 2 až 3 (95% až 99,7%) podle složitosti prací a přítomnosti systematických chyb.

Směrodatná odchylka je charakteristika přesnosti – rozptylu.
Mezní odchylka určuje interval, kde se zvolenou pravděpodobností nachází skutečná hodnota.

Lze také říci, že skutečná chyba měření není větší nežli mezní odchylka (se zvolenou pravděpodobností).

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Zákon hromadění skutečných chyb.

V mnoha případech nelze nebo není výhodné přímo měřit určovanou hodnotu, a tato se pak určuje zprostředkovaně – čili výpočtem z jiných měřených hodnot. Příkladem může být plocha trojúhelníka, jsou-li měřeny dvě strany a úhel.
Potřebujeme nejen vypočítat hledanou hodnotu, ale také určit její směrodatnou odchylku. Známe-li funkční vztah mezi veličinami, dokážeme ji vypočítat pomocí zákona hromadění směrodatných odchylek (ZHSO).

Zákon hromadění skutečných chyb

Funkční vztah:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ..., x_k)$$

$$y + \varepsilon_y = f\left(x_1 + \varepsilon_{x_1}, x_2 + \varepsilon_{x_2}, x_3 + \varepsilon_{x_3}, ..., x_k + \varepsilon_{x_k}\right)$$

Vzhledem k tomu, že skutečné chyby jsou oproti měřeným hodnotám velmi malé, lze rozvinout pravou stranu vztahu podle Taylorova rozvoje s omezením pouze na členy prvního řádu.

$$y + \varepsilon_y = f(x_1, ..., x_k) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_{x_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}\varepsilon_{x_k}$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Zákon hromadění skutečných chyb.

$$\varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_{x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\varepsilon_{x_3} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\varepsilon_{x_k}$$

Skutečné chyby měřených veličin zpravidla neznáme, ale známe jejich směrodatné odchylky. Pak použijeme zákon hromadění směrodatných odchylek.

Zákon hromadění směrodatných odchylek

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{x_k}^2$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Zákon hromadění směrodatných odchylek

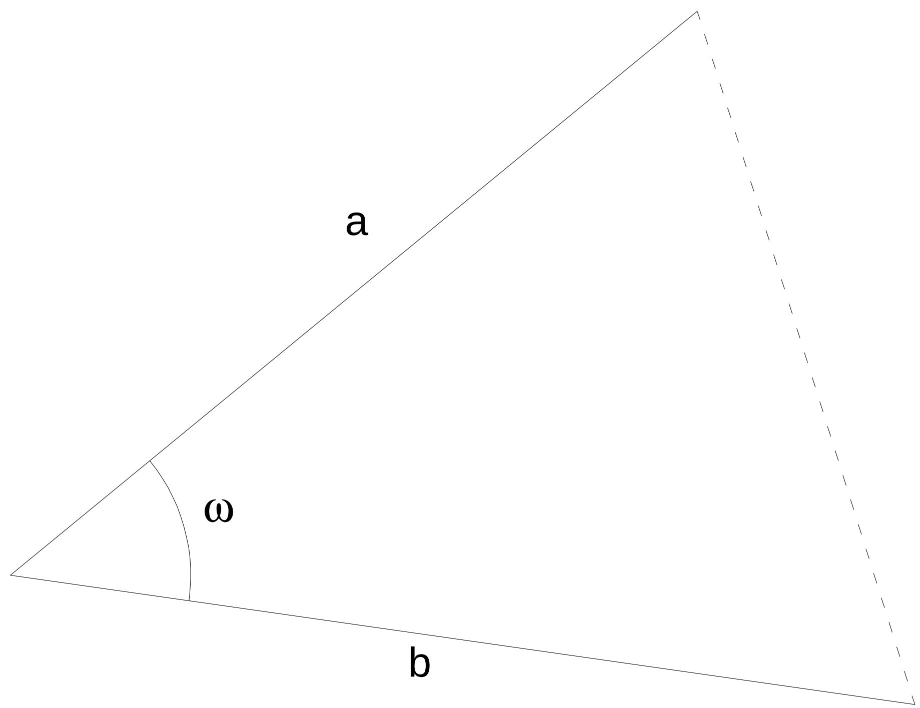
$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \sigma_{x_k}^2$$

Podmínky platnosti.

1. Jednotlivé měřené veličiny, a tedy i jejich skutečné chyby, musí být vzájemně nezávislé.
2. Skutečné chyby mají náhodný charakter, jejich znaménko a velikost se řídí normálním rozdělením.
3. Chyby jsou oproti měřeným hodnotám malé, parciální derivace musí zůstat prakticky konstantní, změní-li se měřené hodnoty o hodnoty chyb.
4. Jednotlivé členy musí mít stejný fyzikální rozměr.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Příklad 1 : Jsou známy dvě délky a = 34,352 m, b = 28,311 m, které byly změřeny se $\sigma_a = \sigma_b = 0{,}002$m. Dále byl změřen úhel $\omega = 52{,}3452°$, $\sigma_\omega = 0{,}0045°$. Určete směrodatnou odchylku plochy trojúhelníka.



Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Funkční vztah :

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin(\omega)$$

Skutečné chyby :

$$\varepsilon_P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot sin(\omega) \cdot \varepsilon_a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot sin(\omega) \cdot \varepsilon_b +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot cos(\omega) \cdot \varepsilon_\omega \cdot \frac{\pi}{180°}$$

$$\left(\rho° = \frac{180°}{\pi} \right)$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Směrodatné odchylky :

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot sin(\omega) \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot sin(\omega) \right)^2 \cdot \sigma_b^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot cos(\omega) \right)^2 \cdot \frac{\sigma_\omega^2}{\left(\rho^\circ\right)^2}$$

Úprava pro $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_d$:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(b^2 + a^2 \right) \cdot sin^2(\omega) \cdot \sigma_d^2 +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot \left(a \cdot b \cdot cos(\omega) \right)^2 \cdot \frac{\sigma_\omega^2}{\left(\rho^\circ\right)^2}$$

Po dosazení : σ_P = 0,043 m^2, P = 384,983 m^2.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

<u>Příklad 2 :</u> Odvoďte vzorec pro směrodatnou odchylku průměru z n měření, znáte-li směrodatnou odchylku jednoho měření σ_l.

Funkční vztah :

$$\bar{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{l_1 + l_2 + \dots l_n}{n}$$

Zákon hromadění skutečných chyb :

$$\varepsilon_{\bar{l}} = \frac{1}{n}\left\{\varepsilon_{l_1} + \varepsilon_{l_2} + \dots + \varepsilon_{l_n}\right\}$$

Víme, že všechna měření mají stejnou směrodatnou odchylku. O skutečných chybách ale nevíme nic (je to náhodná veličina) a proto NELZE závorku zjednodušit. Obecně platí :

$$\varepsilon_{l_1} \neq \varepsilon_{l_2} \neq \dots \neq \varepsilon_{l_n}$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Zákon hromadění směrodatných odchylek :
Ze zadání víme, že všechna měření mají stejnou směrodatnou odchylku.
Proto platí :

$$\sigma_{l_1} = \sigma_{l_2} = \ldots = \sigma_{l_n} = \sigma_l$$

$$\sigma_{\bar{l}}^2 = \frac{1}{n^2}\left\{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2 + \ldots + \sigma_{l_n}^2\right\} = \frac{1}{n^2}\left(n \cdot \sigma_l^2\right) = \frac{\sigma_l^2}{n}$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Výpočet charakteristiky přesnosti měření.

Jako charakteristika přesnosti měření se téměř výhradně využívá směrodatná odchylka.

Druhy směrodatných odchylek:

základní σ : z velkého souboru měření, kde n → ∞,
výběrová s: ze souboru menšího.

Výpočet ze skutečných chyb:

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2}}{n}} \qquad \varepsilon_i = X - l_i$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Zpracování přímých měření stejné přesnosti

Při praktickém měření kromě několika málo specifických případů skutečnou hodnotu neznáme a v takovémto případě je jako nejpravděpodobnější odhad skutečné hodnoty možno použít aritmetický průměr $\bar{l}$. Rozdíly průměrné hodnoty a jednotlivých měření jsou pak nazývány opravami v_i, ze kterých se počítá výběrová směrodatná odchylka σ, přesněji vyjádřeno, její odhad.

Výpočet platí pro měření stejné přesnosti (= stejné váhy rovné jedné).

$$\bar{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \qquad v_i = \bar{l} - l_i \qquad \sigma = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

Pokud je známa směrodatná odchylka jednoho měření a bylo měřeno vícekrát, směrodatná odchylka průměrné hodnoty se vypočte podle vzorce

$$\sigma_{\bar{l}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Směrodatná odchylka je také náhodná veličina – pokud provedeme stejně např. 2 x 10 měření a vypočteme dvakrát směrodatnou odchylku, obecně nebude stejná. Jen pro ilustraci je zde uveden vzorec pro výpočet odhadu směrodatné odchylky směrodatné odchylky.

$$\sigma_{\sigma} = \sigma \frac{1}{\sqrt{2n'}}$$

kde n’ je nadbytečný počet měření, zde n’ = (n-1).

n	2	3	5	10	20	50	100	500
$1/\sqrt{(2n')}$	0,71	0,50	0,35	0,24	0,16	0,10	0,07	0,03

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Zpracování přímých měření nestejné přesnosti.

Pokud měření nemají stejnou přesnost a tato přesnost je známa, je nutno zvolit jiný postup zpracování. Hodnota výsledku měření je pak získána jako vážený průměr

$$\overline{l} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Váhy se určují :

$$p_i = \frac{c}{\sigma_i^2}$$

, kde c je volená konstanta.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Zpracování přímých měření nestejné přesnosti.

Směrodatná odchylka hodnoty určené váženým průměrem se vypočte

$$\sigma_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i (n-1)}}$$

, kde opravy se vypočtou

$$v_i = \bar{l} - l_i$$

$\sigma_{l0} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$, kde σ_{l0} je směrodatná odchylka měření o váze 1.

Příklad 1 : Délka byla měřena opakovaně pětkrát za stejných podmínek a stejnou metodou (= se stejnou přesností). Vypočtěte průměrnou délku, přesnost jednoho měření a přesnost průměru.

i	l / m	v / m	vv / m^2
1	**5,628**	-0,0014	1,96E-06
2	**5,626**	0,0006	3,60E-07
3	**5,627**	-0,0004	1,60E-07
4	**5,624**	0,0026	6,76E-06
5	**5,628**	-0,0014	1,96E-06
Σ	28,133	0,000	1,12E-05

$\bar{l}$ = 5,6266 m, σ_{l_i} = 0,0017 m, $\sigma_{\bar{l}}$ = 0,00075 m

Příklad 2 : Délka byla měřena opakovaně pětkrát různými metodami (= s různou přesností). Vypočtěte průměrnou délku a přesnost průměru.

i	l / m	σ / m	p	l . p	v / m
1	**5,628**	0,0030	0,69	3,908	-0,0013
2	**5,626**	0,0020	1,56	8,791	0,0007
3	**5,627**	0,0025	1,00	5,627	-0,0003
4	**5,624**	0,0035	0,51	2,869	0,0027
5	**5,628**	0,0025	1,00	5,628	-0,0013
Σ			4,77	26,823	

Volba c = $0{,}0025^2$, $\bar{l}$ = 5,6267 m, $\sigma_{\bar{l}}$ = 0,00056 m

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Nivelace – popis přesnosti:

$$\sigma_h = \sigma_0 \cdot \sqrt{L_{km}} \;,$$

σ_0 … směrodatná odchylka kilometrová.

Obvykle se udává přesnost pro obousměrné měření, přesnost jedné cesty:

$$\sigma_{hi} = \sqrt{2} \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{L_{km}}\,. \qquad (\sigma_{0i} = \sqrt{2} \cdot \sigma_0)$$

Přesnost platí pro pořadovou nivelaci, pro libovolný počet přestav, avšak pro běžné délky záměr. Na velmi krátké nebo velmi dlouhé záměry je přesnost jiná.

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Nivelace – rozdíl dvou měření tam a zpět:

(hodnocení, zda odpovídá předkládané přesnosti)

Jedno měření:

$\sigma_{hi} = \sigma_{0i} \cdot \sqrt{L_{km}}$, σ_{0i} ... směrodatná odchylka kilometrová jedna cesta.

Přesnost rozdílu:

$$\Delta = h_T + h_Z$$

$$\varepsilon_\Delta = \varepsilon_{hT} + \varepsilon_{hZ}$$

$$\sigma_\Delta^2 = \sigma_{hT}^2 + \sigma_{hZ}^2 \qquad (\sigma_{hT}^2 = \sigma_{hZ}^2 = \sigma_{hi}^2)$$

$$\sigma_\Delta = \sqrt{2} \cdot \sigma_{hi} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{0i} \cdot \sqrt{L_{km}}$$

Mezní odchylka rozdílu:

$$\Delta_M = \delta_\Delta = u_p \cdot \sigma_\Delta = u_p \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{0i} \cdot \sqrt{L_{km}}$$ (u_p se volí 2; tj. 95%)

$$\Delta_M = u_p \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{L_{km}} = 2 \cdot u_p \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{L_{km}} = 4 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{L_{km}}$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Nivelace – rozdíl známého převýšení a měřeného:
(hodnocení, zda odpovídá předkládané přesnosti, např. měření mezi známými body s body zájmu měřenými bočně).

Měření:

$\sigma_m = \sigma_{0i} \cdot \sqrt{L_{km}}$, σ_{0i} ... směrodatná odchylka kilometrová.

Přesnost rozdílu:

$$\Delta = h_m + h_{známé}$$

$$\varepsilon_\Delta = \varepsilon_{hm} + \varepsilon_{h\ známé}$$

$\sigma_\Delta^2 = \sigma_{hm}^2 + \sigma_{h\ známé}^2$ $\qquad$ ($\sigma_{h\ známé}^2 = 0$)

$$\sigma_\Delta = \sigma_{hm} = \sigma_{0i} \cdot \sqrt{L_{km}}$$

Mezní odchylka rozdílu:

$\Delta_M = \delta_\Delta = u_p \cdot \sigma_\Delta = u_p \cdot \sigma_{0i} \cdot \sqrt{L_{km}}$ $\qquad$ (u_p se volí 2; tj. 95%)

$$\Delta_M = u_p \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{L_{km}} = 2{,}82 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{L_{km}} = 4 \cdot \sigma_0 \cdot \sqrt{\frac{L_{km}}{2}}.$$

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Nivelace – určení výšky bodu zaměřeného vícekrát
(je známa základní směrodatná odchylka):

- řeší se jako průměr,
  - pokud je stejná přesnost, aritmetický,
    $$\sigma_{\bar{l}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
  - pokud je přesnost různá
    $$\sigma_{\bar{l}} = \sqrt{[p]^{-1}}, \qquad \text{kde } p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

(odvození není triviální, nejsnáze vyrovnání zprostředkujících měření)

Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

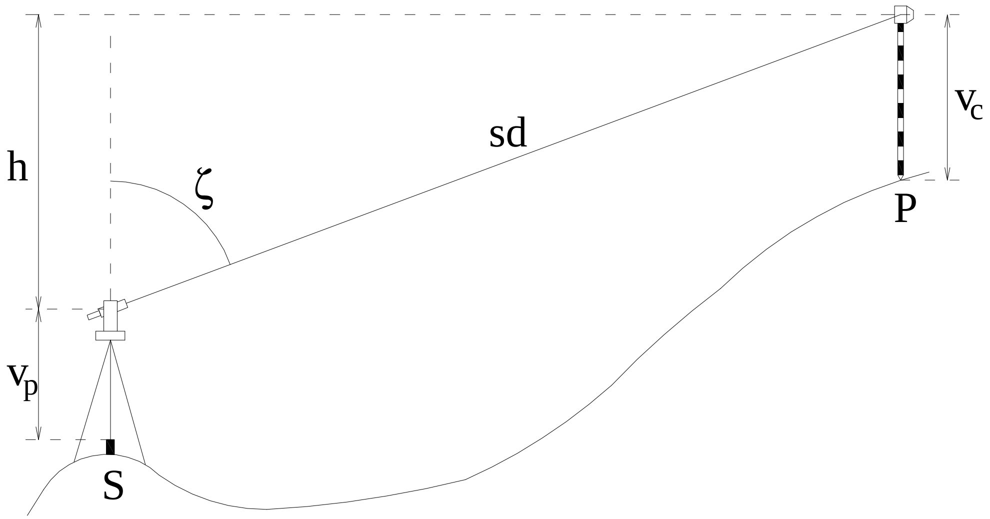
TUVR – základní měření

$$H_P = H_S + v_p + sd \cdot cos(\zeta) - v_c + \left\{\frac{d^2}{2 \cdot R} \cdot (1-k)\right\}$$

$$\sigma_{HP}^2 = \sigma_{HS}^2 + \sigma_{vp}^2 + \sigma_{sd}^2 \cdot (cos(\zeta))^2 + (sd \cdot sin(\zeta))^2 \cdot \left(\frac{\sigma_\zeta}{\rho}\right)^2 + \sigma_{vc}^2 + \left(\frac{d}{R} \cdot (1-k)\right)^2 \cdot \sigma_d^2$$

$$\sigma_{HP}^2 = \sigma_{HS}^2 + \sigma_{vp}^2 + \sigma_{sd}^2 \cdot (cos(\zeta))^2 + (sd \cdot sin(\zeta))^2 \cdot \left(\frac{\sigma_\zeta}{\rho}\right)^2 + \sigma_{vc}^2 \cancel{+ \sigma_o^2}$$

malý vliv v plochém terénu



$$\sigma_o = 0{,}001\ m$$

d/m	σ_d/m
100	0,08
200	0,16
300	0,25
400	0,33
500	0,41
1000	0,82
1500	1,23
2000	1,64

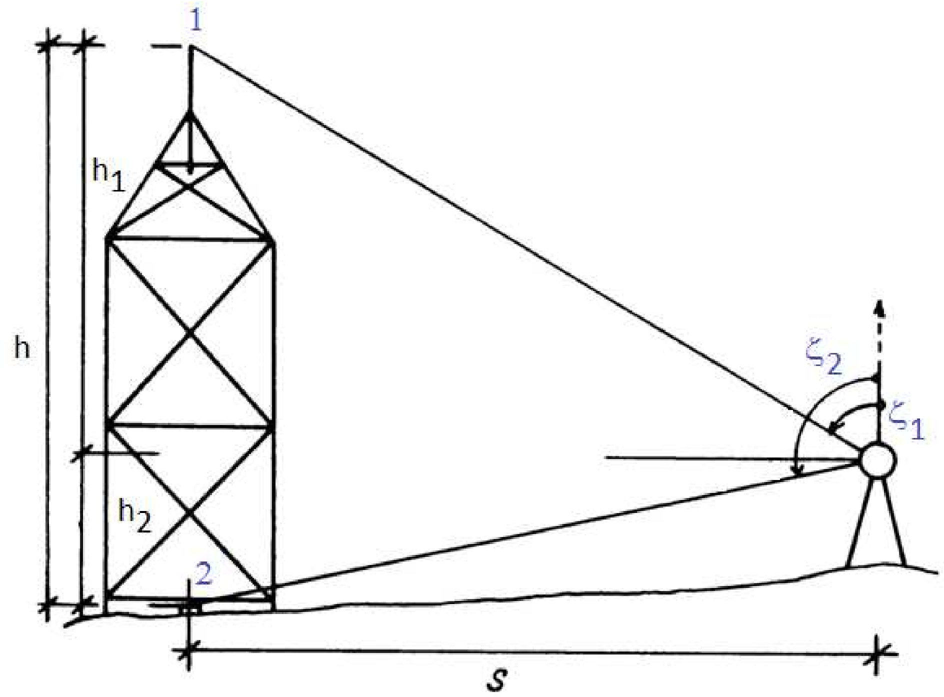
Hodnocení a rozbory přesnosti výškových měření.

Určení výšky předmětu s měřením vodorovné délky:

$$h = s \cdot \left(cotg(\zeta_1) - cotg(\zeta_2)\right)$$

$$\sigma_h^2 = \left(\frac{h}{s}\right)^2 \cdot \sigma_s^2 + \left(\frac{s}{(\sin(\zeta_1))^2}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_{\zeta_1}^2}{\rho^2} + \left(\frac{s}{(\sin(\zeta_2))^2}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_{\zeta_2}^2}{\rho^2}$$

$$\sigma_h^2 = \left(\frac{h}{s}\right)^2 \cdot \sigma_s^2 + s^2 \cdot \left(\frac{1}{(\sin(\zeta_1))^4} + \frac{1}{(\sin(\zeta_2))^4}\right) \cdot \frac{\sigma_\zeta^2}{\rho^2}$$



Konec