Kovarianční matice a výpočty

Martin Štroner, Jitka Suchá, 10.2007

Kovarianční matice

Kovarianční matice **M** popisuje přesnost výsledků vyrovnání a jejich vzájemnou závislost. Matice je čtvercová, symetrická podle diagonály (platí $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$). Na diagonále jsou variance (kvadráty směrodatných odchylek, $\nu = \sigma^2$), mimo diagonálu kovariance C. Nejčastějším výsledkem vyrovnání jsou souřadnice, tvar kovarianční matice pro výsledek vyrovnání souřadnic jednoho bodu X, Y, Z (určeného např. pomocí úlohy volné stanovisko) je:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & C_{XY} & C_{XZ} \\ C_{XY} & \sigma_Y^2 & C_{YZ} \\ C_{XZ} & C_{YZ} & \sigma_Z^2 \end{pmatrix}$$

Pro dva body P1 (X1, Y1, Z1) a P2 (X2, Y2, Z2) určené vyrovnáním má kovarianční matice tvar:

$$\boldsymbol{M_{1,2}} = \begin{pmatrix} \sigma_{X1}^2 & C_{X1Y1} & C_{X1Z1} & C_{X1X2} & C_{X1Y2} & C_{X1Z2} \\ C_{X1Y1} & \sigma_{Y1}^2 & C_{Y1Z1} & C_{Y1X2} & C_{Y1Y2} & C_{Y1Z2} \\ C_{X1Z1} & C_{Y1Z1} & \sigma_{Z1}^2 & C_{Z1X2} & C_{Z1Y2} & C_{Z1Z2} \\ C_{X1X2} & C_{Y1X2} & C_{Z1X2} & \sigma_{X2}^2 & C_{X2Y2} & C_{Z2Y2} \\ C_{X1Y2} & C_{Y1Y2} & C_{Z1Y2} & C_{X2Y2} & \sigma_{Y2}^2 & C_{Z2Y2} \\ C_{X1Z2} & C_{Y1Z2} & C_{Z1Z2} & C_{X2Z2} & C_{Y2Z2} & \sigma_{Z2}^2 \end{pmatrix}$$

Kovariance vyjadřují souvislost (závislost) mezi jednotlivými veličinami a tedy i jejich směrodatnými odchylkami. Kovariance mezi souřadnicemi téhož bodu jsou u běžně používaných geodetických metod nenulové. Aby byly rovny nule, musely by jednotlivé souřadnice být určovány nezávisle. V případě, že kovariance nejsou rovny nule, nelze pro výpočet chyby funkce souřadnic (např. délka d = f (X1, Y1, Z1, X2, Y2, Z2)) použít zákon hromadění směrodatných odchylek v jednoduchém (nematicovém) tvaru. Jednou z podmínek jeho použití je nezávislost proměnných, což v tomto případě není nikdy splněno. Je proto nutno použít obecný zákon hromadění směrodatných odchylek, který nezanedbává kovariance.

Obecný zákon hromadění směrodatných odchylek

Tvar zákona (nazývá se také zákon hromadění vah):

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{F}$$

Obecně je výsledkem tohoto výpočtu opět kovarianční matice **S**, **F** je matice derivací (Jacobiho matice) funkcí neznámých podle jednotlivých neznámých. V nejčastějším případě, kdy se počítá směrodatná odchylka jedné funkce, z matice **F** zůstane jen vektor **f** a kovarianční matice **S** na kvadrát směrodatné odchylky s^2 a tedy platí:

$$s^2 = \boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{f}$$

Výpočet směrodatné odchylky funkce pro n bodů:

Funkce: $\mathrm{g} = \mathrm{g}(\mathrm{X1},\ \mathrm{Y1},\ \mathrm{Z1}, \mathrm{X2}, \mathrm{Y2}, \mathrm{Z2}, \mathrm{X3}, \dots, \mathrm{Zn})$

Vektor derivací: $\boldsymbol{f}^T = \left(\frac{\partial g\,(\dots)}{\partial X1}, \frac{\partial g\,(\dots)}{\partial Y1}, \frac{\partial g\,(\dots)}{\partial Z1}, \frac{\partial g\,(\dots)}{\partial X2}, \dots, \frac{\partial g\,(\dots)}{\partial Zn}\right)$

Vektor **f** musí obsahovat derivace funkce podle všech neznámých, jejichž vztahy a vlastnosti kovarianční matice obsahuje, v odpovídajícím pořadí.
Lze snadno dokázat, že pokud budou všechny kovariance C nulové a tedy všechny veličiny jsou vzájemně nezávislé, jedná se o zákon hromadění směrodatných odchylek ve tvaru

$$s^2 = \left(\frac{\partial g(\dots)}{\partial X1}\right)^2 \cdot \sigma_{X1}{}^2 + \left(\frac{\partial g(\dots)}{\partial Y1}\right)^2 \cdot \sigma_{Y1}{}^2 + \cdots$$

Příklad výpočtu směrodatné odchylky vodorovné délky

Pro vodorovnou délku mezi body P1 a P2 a její směrodatnou odchylku vypočítanou z výše uvedené kovarianční matice $M_{1,2}$ platí:

Funkce: $d_{P1,P2}(X1, Y1, X2, Y2) = \sqrt{(X2 - X1)^2 + (Y2 - Y1)^2}$

Vektor derivací: $\boldsymbol{f}^T = \left(\frac{\partial d\,(\dots)}{\partial X1}, \frac{\partial d\,(\dots)}{\partial Y1}, \frac{\partial d\,(\dots)}{\partial Z1}, \frac{\partial d\,(\dots)}{\partial X2}, \frac{\partial d\,(\dots)}{\partial Y2}, \frac{\partial d\,(\dots)}{\partial Z2}\right)$

Derivace:

$$\frac{\partial d(\dots)}{\partial X1} = -\frac{(X2-X1)}{d_{P1,P2}}$$

$$\frac{\partial d(\dots)}{\partial Y1} = -\frac{(Y2-Y1)}{d_{P1,P2}}$$

$$\frac{\partial d(\dots)}{\partial Z1} = 0$$

$$\frac{\partial d(\dots)}{\partial X2} = \frac{(X2-X1)}{d_{P1,P2}}$$

$$\frac{\partial d(\dots)}{\partial Y2} = \frac{(Y2-Y1)}{d_{P1,P2}}$$

$$\frac{\partial d(\dots)}{\partial Z2} = 0$$

Při numerickém výpočtu se derivace vyčíslí, dosadí do vektoru a provede se výpočet s_d:

$$s_d = \sqrt{\boldsymbol{f}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{f}}$$

Závěr

Popsané učivo lze nalézt v [1] a je součástí výuky předmětu Teorie chyb a vyrovnávací počet. Aplikace obecného zákona hromadění směrodatných odchylek (resp. vah) je velmi důležitou částí vyrovnávacího počtu navazující na vyrovnání, bez jejíž znalosti může dojít k zásadním pochybením při výpočtu směrodatných odchylek veličin vypočítaných z vyrovnaných hodnot. Uvedený postup nelze podceňovat, protože při zanedbání kovariancí je výsledná směrodatná odchylka výrazně odlišná od správné.

Literatura

[1] Böhm, J. – Radouch, V. – Hampacher, M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. Geodetický a kartografický podnik, Praha 1990.