Vliv realizace, vliv přesnosti centrace a určení výšky přístroje a cíle na přesnost určovaných veličin

doc. Ing. Martin Štroner, Ph.D.
Fakulta stavební – ČVUT v Praze

1 Úvod

Při přesných inženýrsko – geodetických měřeních jsou vždy při rozborech přesnosti zvažovány jednotlivé vlivy působící na přesnost přímo určovaných veličin, které jsou dále zpracovávány a kterými jsou v současné době téměř výhradně šikmé délky, vodorovné směry a zenitové úhly. Výjimečně jsou to také vodorovné délky.

Pro rozbory přesnosti výpočtu souřadnic či jiných hodnot z měřených veličin je třeba kromě přesnosti měření jednotlivých veličin uvážit také přesnosti dostředění přístroje a cíle, určení výšky přístroje a cíle a případně přesnost realizace (u vytyčování). Tyto vlivy neovlivňují přímo přesnost měření veličiny jako takové (např. šikmé délky přístroj - hranol), ale určovanou veličinu, tj. např. šikmou vzdálenost bodů, nad kterými jsou zcentrovány a zhorizontovány přístroj a hranol na stativu. Pro výpočet je dále potřebná určovaná veličina. Jednotlivé vlivy budou v dalších odstavcích popsány.

Centrace má vliv na určení všech typů veličin, dosažitelné přesnosti. Přesnost určení výšky přístroje nebo cíle může být do výpočtů zavedena dvěma způsoby. Jednak prostřednictvím výšky přístroje či cíle od bodu a její směrodatné odchylky, což lze při běžných rozborech přesnosti, avšak ve vyrovnání to přináší problémy a proto se vyrovnání obvykle počítá z měřených veličin redukovaných o výšku přístroje a cíle. Pak je třeba do přesnosti měření jednotlivých veličin započítat nejen samotnou přesnost měření, ale také nepřesnost způsobenou určením výšky přístroje a cíle. Tato varianta je popisována dále.

2 Vliv realizace na výsledky vytyčení

Pojem realizace pro potřeby vytyčování značí souhrn přesnosti umístění cílového znaku, na který se měří, a přenesení jeho polohy a vyznačení na potřebný povrch.

Cíl, na který se např. při polárním vytyčení měří, může být např. hranol na výtyčce, na stativu apod., vyznačení polohy může být např. tužkou na dřevěnou desku, často také zatlučením nastřelovacího hřebu do povrchu konstrukce. Obvykle se přesnost realizace souhrnně popisuje hodnotou $\sigma_r = 1\ mm$, pro vytyčení v poloze se předpokládá kružnice chyb o poloměru σ_r.

V dalším popisu nebude v odvozeních odlišován vliv realizace a vliv centrace cíle, neboť je lze popsat totožným způsobem.

3 Obecný postup určení celkové přesnosti měřené veličiny

Měřená veličina, ať už je to délka, směr nebo zenitový úhel, má určitou přesnost. Tato přesnost se skládá z přesnosti měření přístrojem σ_m (např. pro vodorovné směry cílení, odečtení, pro zenitové úhly ještě urovnání indexů), a přesností signalizace počátečního a koncového bodu měřené veličiny. Při geodetických měřeních je na „počátečním“ bodě umístěn (zcentrován) přístroj a na „koncovém“ cíl. Vliv umístění cíle lze popsat hodnotou σ_{CC}, vliv umístění přístroje σ_{CP}. Celková směrodatná odchylka σ_v určované veličiny se pak určí:

$$\sigma_v^2 = \sigma_m^2 + \sigma_{CP}^2 + \sigma_{CC}^2. \tag{1}$$

Přesnost měření přístrojem za daných podmínek je obvykle známa od výrobce či z testování, přesnost umístění přístroje a cíle příslušnými pomůckami obvykle také, jejich vliv na přesnost měřené veličiny je však proměnlivý a pro jednotlivé veličiny měřené na stanovisku může na kratší vzdálenosti značně převýšit samotnou velikost chyby měření. Zároveň jsou mezi jednotlivá měření na stanovisku vnášeny závislosti (korelace), neboť skutečná chyba umístění přístroje je stejná pro všechny veličiny.

Tento typ chyb působících na měření není vhodné podceňovat. Odvození vzorců pro výpočet jejich vlivu bude uvedeno dále, zde jen pro ilustraci několik hodnot: na vzdálenost $100\,m$ způsobí chyba v centraci přístroje $1\,mm$ chybu ve směru 0,6 mgon; na vzdálenost $50\,m$ již 1,3 mgon a na $25\,m$ $2{,}5\,mgon$. Z těchto hodnot vyplývá, že je vhodné zejména při pracech náročných na přesnost zvážit typ a přesnost centrace a určení výšky přístroje.

Dále bude popsán postup odvození těchto vlivů a míry jejich vzájemné závislosti.

3.1 Popis přesnosti centrace a výšky cíle nebo přístroje

Přesnost centrace a určení výšky přístroje/cíle lze popsat kovarianční maticí ve tvaru:

$$\boldsymbol{M}_C = \begin{pmatrix} \sigma_{xy}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{xy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Přesnost centrace lze popsat kružnicí chyb o poloměru σ_{xy} a přesnost určení výšky přístroje směrodatnou odchylkou σ_z. Kružnice chyb je použita, protože přesnost centrace, ačkoli obecně nelze zaručit, že je ve všech směrech stejná, je za takovou pro potřeby výpočtů a hodnocení přesnosti považována.

Veličiny týkající se cíle budou značeny doplňkovým indexem $_{CC}$, veličiny týkající se přístroje indexem $_{CP}$. Kovarianční matice popisující vliv centrace a určení výšky cíle tedy bude značena $\boldsymbol{M}_{CC}$, vliv pro přístroj $\boldsymbol{M}_{CP}$.

3.2 Výpočet vlivu centrace a určení výšky cíle nebo přístroje na měřenou veličinu

Tento vliv značí, že měřená veličina je určována mezi jinými body, než je třeba. Rozdíl mezi ideální a skutečnou polohou lze popsat pouze statisticky dvou nebo třírozměrným normálním rozdělením vyjádřeným kovarianční maticí (2). Jedná se tedy o analogii chyby podkladu. Pro měřenou veličinu v se vliv vypočítá pomocí zákona hromadění směrodatných odchylek. Měřená veličina se vyjádří jako funkce souřadnic stanoviska S a cíle C.

$$v = f(x_S, y_S, z_S; x_C, y_C, z_C)\ . \tag{3}$$

Vliv přesnosti centrace σ_{CP} přístroje lze vyjádřit zákonem hromadění směrodatných odchylek ve tvaru:

$$\sigma_{CP}^2 = \boldsymbol{a}_S \cdot \boldsymbol{M}_{CP} \cdot \boldsymbol{a}_S^T\ ,\ \boldsymbol{a}_S = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_S} & \frac{\partial v}{\partial y_S} & \frac{\partial v}{\partial z_S} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Po roznásobení vzhledem k nulovým kovariancím v matici $\boldsymbol{M}_{CP}$ platí:

$$\sigma_{CP}^2 = \sigma_x^2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x_S}\right)^2 + \sigma_y^2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y_S}\right)^2 + \sigma_z^2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z_S}\right)^2, \tag{5}$$

$$\sigma_{CP}^2 = \sigma_{xy}^2 \cdot \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x_S}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y_S}\right)^2\right\} + \sigma_z^2 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z_S}\right)^2\ . \tag{6}$$

Při vyčíslení derivací a znalosti odhadu přesnosti centrace přístroje lze určit odhad vlivu centrace na měřenou veličinu.

Pro určení vlivu centrace cíle σ_{CC} se obdobně jako v předchozím případě ve vektoru $\boldsymbol{a}$ derivuje veličina v podle souřadnic cíle a kovarianční matice se použije $\boldsymbol{M}_{CC}$, popisující přesnost centrace a určení výšky cíle:

$$\sigma_{CC}^2 = \boldsymbol{a}_C \cdot \boldsymbol{M}_{CC} \cdot \boldsymbol{a}_C^T \text{ , } \boldsymbol{a}_C = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_C} & \frac{\partial v}{\partial y_C} & \frac{\partial v}{\partial z_C} \end{pmatrix} . \qquad (7)$$

3.3 Výpočet vzájemných závislostí mezi veličinami měřenými na stanovisku

Z daného stanoviska je z „jedné centrace“ obvykle měřeno více veličin, při určování vlivu centrace se postupuje stejně, pouze se se výpočet pro n veličin provede dohromady:

$$\sigma_{CP}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{M}_{CP} \cdot \boldsymbol{A}^T \text{ ,} \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_S} & \frac{\partial v_1}{\partial y_S} & \frac{\partial v_1}{\partial z_S} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_S} & \frac{\partial v_2}{\partial y_S} & \frac{\partial v_2}{\partial z_S} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial x_S} & \frac{\partial v_n}{\partial y_S} & \frac{\partial v_n}{\partial z_S} \end{pmatrix} . \qquad (9)$$

Obecně žádná derivace není nutně nulová, a tedy vznikají ve výsledné kovarianční matici popisující vliv centrace přístroje na měřenou veličinu nenulové kovariance. Pokud jsou kovariance nenulové, příslušné měřené veličiny jsou vzájemně závislé.

Při určení vlivu centrace a určení výšky přístroje lze postupovat stejně, pouze k závislosti na stanovisku mezi veličinami měřenými na různé body nemůže dojít, neboť skutečné chyby centrace jsou pro cílové body vzájemně nezávislé. Mohou být ovšem závislé různé veličiny měřené na stejný cíl.

4 Vliv na přesnost měření vodorovných směrů

Rovnice vyjadřující vztah směru φ a souřadnic je totožná se vztahem pro výpočet směru z bodu 1 na bod 2 ze souřadnic:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) + o + o_K \text{ ,} \qquad (10)$$

kde o je orientační posun a o_K je zařazení do kvadrantu (oprava z kvadrantu), x_1, y_1; x_2, y_2 jsou souřadnice bodů 1 a 2.

Derivace podle jednotlivých souřadnic (d je vodorovná vzdálenost):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{\Delta y_{1,2}}{d^2} \text{ ,} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\frac{\Delta y_{1,2}}{d^2} \text{ ,} \qquad (11)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = -\frac{\Delta x_{1,2}}{d^2} \text{ ,} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \frac{\Delta x_{1,2}}{d^2} \text{ ,} \qquad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} = 0 \text{ .} \qquad (13)$$

Z toho, že derivace podle souřadnic z je rovna nule vyplývá, že přesnost vodorovného směru není ovlivněna určením výšky cíle nebo přístroje, což je více než zřejmé. Celkové otočení osnovy směrů dané orientačním posunem také nemá vliv.

4.1 Vliv centrace přístroje

Pro jeden měřený směr za předpokladu kružnice chyb popisující přesnost centrace přístroje ve všech směrech směrodatnou odchylkou o velikosti σ_{xy} lze vliv centrace přístroje na měřený směr vyjádřit následovně:

$$\sigma^2_{\varphi_{CP}} = a_{CP} \cdot \boldsymbol{M}_{CP} \cdot a^T_{CP}, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{a}_{CP} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{M}_{CP} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{xyCP} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{xyCP} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Po dosazení a úpravě (v jednotkách radiánů):

$$\hat{\sigma}^2_{\varphi_{CP}} = \left(\frac{\Delta y_{1,2}}{d^2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCP} + \left(\frac{\Delta x_{1,2}}{d^2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCP} = \frac{\sigma^2_{xyCP}}{d^2}. \tag{17}$$

$$\sigma_{\varphi_{CP}} = \frac{\sigma_{xyCP}}{d} \cdot \rho, \tag{18}$$

kde $\rho = 200/\pi$ a $\sigma_{\varphi_{CP}}$ je v jednotkách gon. Výsledek vyhovuje intuitivní představě, že na přesnost směru má vliv pouze složka přesnosti centrace kolmá na záměru. Velikost vlivu je závislá na vzdálenosti přístroje a cíle.

4.2 Vliv centrace cíle

Vliv centrace cíle se určí stejným způsobem:

$$\sigma^2_{\varphi_{CC}} = \boldsymbol{a}_{CC} \cdot \boldsymbol{M}_{CC} \cdot \boldsymbol{a}^T_{CC}, \tag{19}$$

$$\boldsymbol{a}_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{M}_{CC} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{xyCC} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{xyCC} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\varphi_{CC}} = \left(\frac{\Delta y_{1,2}}{d^2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCC} + \left(\frac{\Delta x_{1,2}}{d^2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCC} = \frac{\sigma^2_{xyCC}}{d^2}, \tag{22}$$

$$\sigma_{\varphi_{CC}} = \frac{\sigma_{xyCC}}{d} \cdot \rho. \tag{23}$$

Vliv centrace cíle na přesnost směru se určí stejně jako u centrace přístroje.

4.3 Celkový vliv centrací na přesnost

Celkový vliv na přesnost měřeného vodorovného směru σ_{φ_C} se určí jako souhrnný vliv ze dvou předcházejících odstavců. Platí:

$$\boldsymbol{M}_C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{CP} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{CC} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{a}_C = (\boldsymbol{a}_{CP} \quad \boldsymbol{a}_{CC}) \,, \tag{25}$$

$$\sigma^2_{\varphi_C} = \boldsymbol{a}_C \cdot \boldsymbol{M}_C \cdot \boldsymbol{a}_C^T. \tag{26}$$

Lze jednoduše odvodit, že vzhledem k nezávislosti jednotlivých veličin (kovarianční matice je diagonální) platí pro celkový vliv:

$$\sigma^2_{\varphi_C} = \sigma^2_{\varphi_{CP}} + \sigma^2_{\varphi_{CC}} \,. \tag{27}$$

Velikost této směrodatné odchylky lze ilustrovat na příkladu měřeného směru na vzdálenost $d = 50\ m$, se směrodatnou odchylkou centrace přístroje i cíle $\sigma_{xyCP} = \sigma_{xyCC} = 1\ mm$. Pak vliv centrace cíle i centrace přístroje je $1{,}2\ mgon$, celkový vliv pak činí $1{,}8\ mgon$. Jedná se o hodnotu téměř rovnu přesnosti měření směru v jedné skupině pro „stavební" totální stanici (běžně $2{,}0\ mgon$ nebo lepší), v případě přístrojů s vyšší přesností pak tato hodnota z hlediska vlivu převládne.

4.4 Závislost měřených vodorovných směrů na stanovisku

Jednotlivé měřené směry na stanovisku jsou měřeny na různé cíle, které mají různou skutečnou chybu centrace a takto jsou nezávislé. Skutečná chyba centrace přístroje je však pro všechny společná a tedy jsou jednotlivé směry závislé. Míru závislosti lze určit tak, jak bylo popsáno v odstavci 3.3, pro ilustraci vlivu byla kovarianční matice vyčíslena pro osnovu směrů $\varphi = [0\ gon;\ 12{,}5\ gon;\ 25\ gon;\ 50\ gon;\ 100\ gon;\ 200\ gon]$ měřenou na cíle vzdálené $50\ m$, směrodatná odchylka centrace cílů i přístroje $0{,}001\ m$, přesnost měření směru $0{,}3\ mgon$. Kovarianční matice $\boldsymbol{M}^2_{CP}$ popisující vliv centrace přístroje (v mgon):

$$\boldsymbol{M}_{CP} = \begin{pmatrix} 1{,}62 & 1{,}59 & 1{,}50 & 1{,}15 & 0{,}00 & -1{,}62 \\ 1{,}59 & 1{,}62 & 1{,}59 & 1{,}35 & 0{,}32 & -1{,}59 \\ 1{,}50 & 1{,}59 & 1{,}62 & 1{,}50 & 0{,}62 & -1{,}50 \\ 1{,}15 & 1{,}35 & 1{,}50 & 1{,}62 & 1{,}15 & -1{,}15 \\ 0{,}00 & 0{,}32 & 0{,}62 & 1{,}15 & 1{,}62 & 0{,}00 \\ -1{,}62 & -1{,}59 & -1{,}50 & -1{,}15 & 0{,}00 & 1{,}62 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Matice korelačních koeficientů, koeficienty korelace mezi jednotlivými směry:

$$\boldsymbol{r}_{CP} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}98 & 0{,}92 & 0{,}71 & 0{,}00 & -1{,}00 \\ 0{,}98 & 1 & 0{,}98 & 0{,}83 & 0{,}20 & -0{,}98 \\ 0{,}92 & 0{,}98 & 1 & 0{,}92 & 0{,}38 & -0{,}92 \\ 0{,}71 & 0{,}83 & 0{,}92 & 1 & 0{,}71 & -0{,}71 \\ 0{,}00 & 0{,}20 & 0{,}38 & 0{,}71 & 1 & 0{,}00 \\ -1{,}00 & -0{,}98 & -0{,}92 & -0{,}71 & 0{,}00 & 1 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Korelační koeficienty ukazují na značnou závislost ($r > 0{,}7$) ještě pro směry odlišné o 50 gon. Závislost je dána pouze velikostí rozdílu směrů.

Při výpočtech se však musí uvážit celková přesnost měřených směrů a jejich závislosti. Zbylé vlivy, vliv přesnosti měření a vliv centrace cílů jsou vzájemně nezávislé, a jsou charakterizovány vždy diagonální kovarianční maticí. Pro vliv centrace cíle platí:

$$\boldsymbol{M}_{CC} = diag\left(\sigma^2_{\varphi_{CC}} = (1{,}27\ mgon)^2\right) = \begin{pmatrix} 1{,}62 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}62 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Pro vliv měření charakterizovaný směrodatnou odchylkou měřeného směru 0,3 mgon platí:

$$\boldsymbol{M}_m = diag\left(\sigma_{\varphi_m}^2 = (0{,}3\ mgon)^2\right) = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}09 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Výsledná kovarianční matice charakterizující celkovou přesnost:

$$\boldsymbol{M}_\varphi = \begin{pmatrix} 3{,}33 & 1{,}59 & 1{,}50 & 1{,}15 & 0{,}00 & -1{,}62 \\ 1{,}59 & 3{,}33 & 1{,}59 & 1{,}35 & 0{,}32 & -1{,}59 \\ 1{,}50 & 1{,}59 & 3{,}33 & 1{,}50 & 0{,}62 & -1{,}50 \\ 1{,}15 & 1{,}35 & 1{,}50 & 3{,}33 & 1{,}15 & -1{,}15 \\ 0{,}00 & 0{,}32 & 0{,}62 & 1{,}15 & 3{,}33 & 0{,}00 \\ -1{,}62 & -1{,}59 & -1{,}50 & -1{,}15 & 0{,}00 & 3{,}33 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Matice korelačních koeficientů:

$$\boldsymbol{r}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}48 & 0{,}45 & 0{,}34 & 0{,}00 & -0{,}49 \\ 0{,}48 & 1 & 0{,}48 & 0{,}40 & 0{,}09 & -0{,}48 \\ 0{,}45 & 0{,}48 & 1 & 0{,}45 & 0{,}19 & -0{,}45 \\ 0{,}34 & 0{,}40 & 0{,}45 & 1 & 0{,}34 & -0{,}34 \\ 0{,}00 & 0{,}09 & 0{,}19 & 0{,}34 & 1 & 0{,}00 \\ -0{,}49 & -0{,}48 & -0{,}45 & -0{,}34 & 0{,}00 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Korelační koeficienty nabývají poměrně vysokých hodnot, maximum je pro totožný nebo opačný směr 0,49 (v absolutní hodnotě). Při skutečně exaktním vyrovnání mikrosítí by tato závislost neměla být zanedbávána.

V případě nižší přesnosti měření směrů nebo větší vzdálenosti mezi stanoviskem a cíli budou korelační koeficienty příslušně nižší, neboť se sníží vliv centrace přístroje na stanovisku.

5 Vliv na přesnost měření zenitových úhlů

Rovnice vyjadřující vztah zenitového úhlu ζ a souřadnic je totožná se vztahem pro výpočet zenitového úhlu z bodu 1 na bod 2 ze souřadnic:

$$\zeta = \arccos\left(\frac{z_2 - z_1}{sd_{12}}\right), \tag{34}$$

kde z_1, z_2 jsou výškové souřadnice bodů 1 a 2, sd_{12} je šikmá vzdálenost. Derivace podle jednotlivých souřadnic (d je vodorovná vzdálenost):

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x_1} = -\frac{\Delta x_{1,2} \cdot \Delta z_{1,2}}{d \cdot sd^2}, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial x_2} = \frac{\Delta x_{1,2} \cdot \Delta z_{1,2}}{d \cdot sd^2}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y_1} = -\frac{\Delta y_{1,2} \cdot \Delta z_{1,2}}{d \cdot sd^2}, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial y_2} = \frac{\Delta y_{1,2} \cdot \Delta z_{1,2}}{d \cdot sd^2}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z_1} = -\frac{d}{sd^2} = -\frac{\sin(\zeta)}{sd}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial z_2} = \frac{d}{sd^2} = \frac{\sin(\zeta)}{sd} \tag{37}$$

Žádná z derivací není obecně rovna nule, a tedy přesnost měřeného zenitového úhlu je závislá jak na přesnosti centrace přístroje a cíle, tak na přesnosti určení jejich výšky.

5.1 Vliv centrace a určení výšky přístroje

Pro jeden měřený zenitový úhel za předpokladu kružnice chyb popisující přesnost centrace přístroje ve všech směrech směrodatnou odchylkou o velikosti σ_{xy} a přesnost určení výšky přístroje směrodatnou odchylkou σ_z lze jejich vliv vyjádřit následovně:

$$\sigma^2_{\zeta_{CP}} = a_{CP} \cdot \boldsymbol{M}_{CP} \cdot a^T_{CP} \,, \tag{38}$$

$$\boldsymbol{a}_{CP} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\zeta}{\partial x_1} & \frac{\partial\zeta}{\partial y_1} & \frac{\partial\zeta}{\partial z_1} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

$$\boldsymbol{M}_{CP} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{xyCP} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{xyCP} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{zCP} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Po dosazení a úpravě:

$$\hat{\sigma}^2_{\zeta_{CP}} = \left(\frac{\Delta z_{1,2}}{sd^2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCP} + \left(\frac{d}{sd^2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{zCP} \,. \tag{41}$$

Velikost vlivu je závislá na vzdálenosti přístroje a cíle, za běžných situací, kdy platí $d \gg \Delta z_{1,2}$, má první člen významně nižší (prakticky zanedbatelný) vliv.

5.2 Vliv centrace a určení výšky cíle

Vliv cíle se určí stejným způsobem, pouze derivace mají opačná znaménka, což v kvadrátech nehraje roli.

$$\sigma^2_{\zeta_{CC}} = a_{CC} \cdot \boldsymbol{M}_{CC} \cdot a^T_{CC}, \tag{42}$$

$$\boldsymbol{a}_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\zeta}{\partial x_2} & \frac{\partial\zeta}{\partial y_2} & \frac{\partial\zeta}{\partial z_2} \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$\boldsymbol{M}_{CC} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{xyCC} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{xyCC} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{zCC} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Po dosazení a úpravě:

$$\hat{\sigma}^2_{\zeta_{CC}} = \left(\frac{\Delta z_{1,2}}{sd^2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCC} + \left(\frac{d}{sd^2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{zCC} \,. \tag{45}$$

5.3 Celková přesnost

Celkový vliv na přesnost měřeného zenitového úhlu σ_{ζ_C} se určí jako souhrnný vliv ze dvou předcházejících odstavců. Platí:

$$\boldsymbol{M}_C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{CP} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{CC} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{a}_C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{CP} & \boldsymbol{a}_{CC} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$\sigma^2_{\zeta_C} = \boldsymbol{a}_C \cdot \boldsymbol{M}_C \cdot \boldsymbol{a}^T_C. \tag{48}$$

Lze jednoduše odvodit, že vzhledem k nezávislosti jednotlivých veličin (kovarianční matice je diagonální) platí pro celkový vliv:

$$\sigma^2_{\zeta_C} = \sigma^2_{\zeta_{CP}} + \sigma^2_{\zeta_{CC}} \,. \tag{49}$$

Velikost této směrodatné odchylky lze ilustrovat na příkladu měřeného zenitového úhlu $\zeta = 80\, gon$ na vzdálenost $d = 50\, m$, se směrodatnou odchylkou centrace přístroje i cíle $\sigma_{xyCP} = \sigma_{xyCC} = 1\, mm$ a směrodatnou odchylkou určení výšky přístroje i cíle $\sigma_{zCP} = \sigma_{zCC} = 1\, mm$. Pak vliv cíle i přístroje je $1{,}2\, mgon$, celkový vliv pak činí $1{,}7\, mgon$. Jedná se o hodnotu téměř rovnu přesnosti měření zenitového úhlu v jedné skupině pro „stavební“ totální stanici (běžně $2{,}0\, mgon$ nebo lepší), v případě přístrojů s vyšší přesností pak tato hodnota z hlediska vlivu převládne.

5.4 Závislost měřených zenitových úhlů na stanovisku

Jednotlivé měřené zenitové úhly na stanovisku jsou měřeny na různé cíle, které mají různou skutečnou chybu centrace a určení výšky přístroje a takto jsou tedy nezávislé. Skutečná chyba centrace a určení výšky přístroje je však pro všechny společná a tedy jsou jednotlivé zenitové úhly závislé. Míru závislosti lze určit tak, jak bylo popsáno v odstavci 3.3, pro ilustraci vlivu byla kovarianční matice vyčíslena pro osnovu měřených zenitových úhlů $\zeta = [80\, gon;\ 85\, gon;\ 90\, gon;\ 100\, gon;\ 110\, gon;\ 120\, gon]$ měřenou na cíle vzdálené $50\, m$, směrodatná odchylka centrace i určení výšky cílů i přístroje $0{,}001\, m$, přesnost měření směru $0{,}3\, mgon$.

Kovarianční matice $\boldsymbol{M}_{CP}$ popisující vliv centrace přístroje (v jednotkách mgon):

$$\boldsymbol{M}_{CP} = \begin{pmatrix} 1{,}47 & 1{,}49 & 1{,}5 & 1{,}47 & 1{,}43 & 1{,}47 \\ 1{,}49 & 1{,}53 & 1{,}55 & 1{,}53 & 1{,}48 & 1{,}49 \\ 1{,}50 & 1{,}55 & 1{,}58 & 1{,}58 & 1{,}53 & 1{,}50 \\ 1{,}47 & 1{,}53 & 1{,}58 & 1{,}62 & 1{,}58 & 1{,}47 \\ 1{,}43 & 1{,}48 & 1{,}53 & 1{,}58 & 1{,}58 & 1{,}43 \\ 1{,}47 & 1{,}49 & 1{,}50 & 1{,}47 & 1{,}43 & 1{,}47 \end{pmatrix} . \tag{50}$$

Matice korelačních koeficientů, koeficienty korelace mezi jednotlivými směry:

$$\boldsymbol{r}_{CP} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}99 & 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}94 & 1{,}00 \\ 0{,}99 & 1 & 1{,}00 & 0{,}97 & 0{,}95 & 0{,}99 \\ 0{,}98 & 1{,}00 & 1 & 0{,}99 & 0{,}97 & 0{,}98 \\ 0{,}95 & 0{,}97 & 0{,}99 & 1 & 0{,}99 & 0{,}95 \\ 0{,}94 & 0{,}95 & 0{,}97 & 0{,}99 & 1 & 0{,}94 \\ 1{,}00 & 0{,}99 & 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}94 & 1 \end{pmatrix} . \tag{51}$$

Korelační koeficienty ukazují na prakticky funkční vztah ($\rho > 0{,}94$) pro běžně měřené zenitové úhly (v intervalu 80 gon až 120 gon).

Při výpočtech se však musí uvážit celková přesnost měřených směrů a jejich závislosti. Zbylé vlivy, vliv přesnosti měření a vliv centrace cílů jsou vzájemně nezávislé, a jsou charakterizovány vždy diagonální kovarianční maticí. Pro vliv centrace a určení výšky cíle platí:

$$\boldsymbol{M}_{CC} = diag(\boldsymbol{M}_{CP}) = \begin{pmatrix} 1{,}47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}53 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}58 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}62 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}47 \end{pmatrix}. \qquad (52)$$

Pro vliv měření charakterizovaný směrodatnou odchylkou měřeného směru 0,3 mgon platí:

$$\boldsymbol{M}_m = diag\left(\sigma^2_{\zeta_m} = (0{,}3\; mgon)^2\right) = \begin{pmatrix} 0{,}09 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}09 \end{pmatrix}. \qquad (53)$$

Výsledná kovarianční matice charakterizující celkovou přesnost:

$$\boldsymbol{M}_\zeta = \begin{pmatrix} 3{,}03 & 1{,}49 & 1{,}50 & 1{,}47 & 1{,}43 & 1{,}47 \\ 1{,}49 & 3{,}15 & 1{,}55 & 1{,}53 & 1{,}48 & 1{,}49 \\ 1{,}50 & 1{,}55 & 3{,}25 & 1{,}58 & 1{,}53 & 1{,}50 \\ 1{,}47 & 1{,}53 & 1{,}58 & 3{,}33 & 1{,}58 & 1{,}47 \\ 1{,}43 & 1{,}48 & 1{,}53 & 1{,}58 & 3{,}25 & 1{,}43 \\ 1{,}47 & 1{,}49 & 1{,}50 & 1{,}47 & 1{,}43 & 3{,}03 \end{pmatrix}. \qquad (54)$$

Matice korelačních koeficientů:

$$\boldsymbol{r}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}48 & 0{,}48 & 0{,}46 & 0{,}46 & 0{,}49 \\ 0{,}48 & 1 & 0{,}48 & 0{,}47 & 0{,}46 & 0{,}48 \\ 0{,}48 & 0{,}48 & 1 & 0{,}48 & 0{,}47 & 0{,}48 \\ 0{,}46 & 0{,}47 & 0{,}48 & 1 & 0{,}48 & 0{,}46 \\ 0{,}46 & 0{,}46 & 0{,}47 & 0{,}48 & 1 & 0{,}46 \\ 0{,}49 & 0{,}48 & 0{,}48 & 0{,}46 & 0{,}46 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (55)$$

Korelační koeficienty nabývají poměrně vysokých hodnot, minimum je 0,46. Při skutečně exaktním vyrovnání mikrosítí by tato závislost neměla být zanedbávána. Korelace není závislá na směru měření.

V případě nižší přesnosti měření směrů nebo větší vzdálenosti mezi stanoviskem a cíli budou korelační koeficienty příslušně nižší, neboť se sníží vliv centrace a určení výšky přístroje na stanovisku.

6 Vliv na přesnost měření šikmých délek

Rovnice vyjadřující vztah šikmé délky sd a souřadnic je totožná se vztahem pro výpočet šikmé délky z bodu 1 na bod 2 ze souřadnic:

$$sd = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\Delta x_{12}^2 + \Delta y_{12}^2 + \Delta z_{12}^2}, \qquad (56)$$

kde x_1, y_1; x_2, y_2; z_1, z_2 jsou souřadnice bodů 1 a 2. Derivace podle jednotlivých souřadnic:

$$\frac{\partial sd}{\partial x_1} = -\frac{\Delta x_{1,2}}{sd}, \qquad \frac{\partial sd}{\partial x_2} = \frac{\Delta x_{1,2}}{sd}, \qquad (57)$$

$$\frac{\partial sd}{\partial y_1} = -\frac{\Delta y_{1,2}}{sd}, \qquad \frac{\partial sd}{\partial y_2} = \frac{\Delta y_{1,2}}{sd}, \qquad (58)$$

$$\frac{\partial sd}{\partial z_1} = -\frac{\Delta z_{1,2}}{sd}, \qquad \frac{\partial sd}{\partial z_2} = \frac{\Delta z_{1,2}}{sd}. \tag{59}$$

Žádná z derivací není obecně rovna nule, a tedy přesnost měřené šikmé délky je závislá jak na přesnosti centrace přístroje a cíle, tak na přesnosti určení jejich výšky.

6.1 Vliv centrace a určení výšky přístroje

Pro jednu měřenou šikmou délku za předpokladu kružnice chyb popisující přesnost centrace ve všech směrech směrodatnou odchylkou o velikosti σ_{xy} a určení výšky přístroje se směrodatnou odchylkou σ_{zCP} lze vliv centrace přístroje vyjádřit následovně:

$$\sigma^2_{sd_{CP}} = a_{CP} \cdot \boldsymbol{M}_{CP} \cdot a^T_{CP}, \tag{60}$$

$$\boldsymbol{a}_{CP} = \begin{pmatrix} \frac{\partial sd}{\partial x_1} & \frac{\partial sd}{\partial y_1} & \frac{\partial sd}{\partial z_1} \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$\boldsymbol{M}_{CP} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{xyCP} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{xyCP} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{zCP} \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Po dosazení a úpravě:

$$\sigma^2_{sd_{CP}} = \left(\frac{\Delta x_{1,2}}{sd_{1,2}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCP} + \left(\frac{\Delta y_{1,2}}{sd_{1,2}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCP} + \left(\frac{\Delta z_{1,2}}{sd_{1,2}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{zCP}, \tag{63}$$

$$\sigma_{sd_{CP}} = \sqrt{\left(\frac{d_{1,2}}{sd_{1,2}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCP} + \left(\frac{\Delta z_{1,2}}{sd_{1,2}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{zCP}}. \tag{64}$$

Výsledek vyhovuje intuitivní představě, že na přesnost šikmé délky má vliv pouze složka přesnosti centrace ve směru záměry. Velikost vlivu na rozdíl od směrů a zenitových úhlů není závislá na velikosti měřené délky.

6.2 Vliv centrace a určení výšky cíle

Vliv centrace cíle se určí stejným způsobem, výsledný vzorec má stejný tvar a je zde uváděn zejména kvůli označení:

$$\sigma_{sd_{CC}} = \sqrt{\left(\frac{d_{1,2}}{sd_{1,2}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{xyCC} + \left(\frac{\Delta z_{1,2}}{sd_{1,2}}\right)^2 \cdot \sigma^2_{zCC}}. \tag{65}$$

6.3 Celkový vliv na přesnost

Celkový vliv na přesnost měřené šikmé délky σ_{sd_C} se určí jako souhrnný vliv ze dvou předcházejících odstavců. Platí:

$$\boldsymbol{M}_C = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_{CP} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_{CC} \end{pmatrix}, \tag{66}$$

$$\boldsymbol{a}_C = (\boldsymbol{a}_{CP} \quad \boldsymbol{a}_{CC}), \tag{67}$$

$$\sigma_{sd_C}^2 = \boldsymbol{a}_C \cdot \boldsymbol{M}_C \cdot \boldsymbol{a}_C^T. \tag{68}$$

Lze jednoduše odvodit, že vzhledem k nezávislosti jednotlivých veličin (kovarianční matice diagonální) platí pro celkový vliv:

$$\sigma_{sd_C}^2 = \sigma_{sd_{CP}}^2 + \sigma_{sd_{CC}}^2 \,. \tag{69}$$

Velikost této směrodatné odchylky lze ilustrovat na příkladu měřené šikmé délky $sd = 50\ m$ (vodorovná složka $hd = 49{,}75\ m$, svislá složka $\Delta z = 5{,}0\ m$) se směrodatnou odchylkou centrace a určení výšky přístroje i cíle $\sigma_{xyCP} = \sigma_{xyCC} = \sigma_{zCC} = \sigma_{zCP} = 1\ mm$. Pak vliv centrace a výšky cíle i přístroje je $0{,}001\ m$, celkový vliv pak činí $0{,}0014\ m$. Jedná se o hodnotu blízkou přesnosti jednoho měření šikmé délky pro běžnou totální stanici ($0{,}002\ m$), v případě přístrojů s vyšší přesností (přesnost jednoho měření délky 1 mm nebo dokonce 0,6 mm), pak tato hodnota z hlediska vlivu převládne.

6.4 Závislost měřených šikmých délek na stanovisku

Jednotlivé měřené šikmé délky na stanovisku jsou měřeny na různé cíle, které mají různou skutečnou chybu centrace a takto jsou nezávislé. Skutečná chyba centrace a určení výšky přístroje je však pro všechny společná a tedy jsou jednotlivé směry závislé. Míru závislosti lze určit tak, jak bylo popsáno v odstavci 3.3, pro ilustraci vlivu byla kovarianční matice vyčíslena pro osnovu měřených šikmých délek ve směrech $\varphi = [0\ gon;\ 12{,}5\ gon;\ 25\ gon;\ 50\ gon;\ 100\ gon;\ 200\ gon]$ měřenou na cíle vzdálené $50\ m$, zenitové úhly měření $\zeta = [80\ gon; 85\ gon;\ 90\ gon;\ 100\ gon;\ 110\ gon;\ 120\ gon]$, směrodatná odchylka centrace cílů i přístroje $0{,}001\ m$, přesnost měření délky $1\ mm$.

Kovarianční matice $\boldsymbol{M}_{CP}$ popisující vliv centrace přístroje (v jednotkách mm):

$$\boldsymbol{M}_{CP} = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0{,}98 & 0{,}92 & 0{,}67 & -0{,}05 & -1{,}00 \\ 0{,}98 & 1{,}0 & 0{,}98 & 0{,}81 & 0{,}15 & -0{,}98 \\ 0{,}92 & 0{,}98 & 1{,}0 & 0{,}91 & 0{,}35 & -0{,}92 \\ 0{,}67 & 0{,}81 & 0{,}91 & 1{,}0 & 0{,}70 & -0{,}67 \\ -0{,}05 & 0{,}15 & 0{,}35 & 0{,}70 & 1{,}0 & 0{,}05 \\ -1{,}00 & -0{,}98 & -0{,}92 & -0{,}67 & 0{,}05 & 1{,}0 \end{pmatrix}. \tag{70}$$

Matice korelačních koeficientů je shodná s touto kovarianční maticí.

Korelační koeficienty ukazují na značnou závislost ($r > 0{,}65$) ještě pro směry měření délek odlišné o 50 gon. Závislost je dána pouze velikostí rozdílu směrů a výšek.

Při výpočtech se však musí uvážit celková přesnost měřených směrů a jejich závislosti. Zbylé vlivy, vliv přesnosti měření a vliv centrace cílů jsou vzájemně nezávislé, a jsou charakterizovány vždy diagonální kovarianční maticí. Pro vliv centrace cíle platí:

$$\boldsymbol{M}_{CC} = diag\left(\sigma_{sd_{CC}}^2 = (1{,}0\ mm)^2\right) = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}. \tag{71}$$

Pro vliv měření charakterizovaný směrodatnou odchylkou měřené šikmé délky 1 mm platí:

$$\boldsymbol{M}_m = diag\left(\sigma_{sd_m}^2 = (1{,}0\ mm)^2\right) = \begin{pmatrix} 1{,}0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}0 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Výsledná kovarianční matice charakterizující celkovou přesnost:

$$\boldsymbol{M}_{sd} = \begin{pmatrix} 3,0 & 0,98 & 0,92 & 0,67 & -0,05 & -1,00 \\ 0,98 & 3,0 & 0,98 & 0,81 & 0,15 & -0,98 \\ 0,92 & 0,98 & 3,0 & 0,91 & 0,35 & -0,92 \\ 0,67 & 0,81 & 0,91 & 3,0 & 0,70 & -0,67 \\ -0,05 & 0,15 & 0,35 & 0,70 & 3,0 & 0,05 \\ -1,00 & -0,98 & -0,92 & -0,67 & 0,05 & 3,0 \end{pmatrix}. \qquad (73)$$

Matice korelačních koeficientů:

$$\boldsymbol{r}_{sd} = \begin{pmatrix} 1 & 0,33 & 0,31 & 0,22 & -0,02 & -0,33 \\ 0,33 & 1 & 0,33 & 0,27 & 0,05 & -0,33 \\ 0,31 & 0,33 & 1 & 0,30 & 0,12 & -0,31 \\ 0,22 & 0,27 & 0,30 & 1 & 0,23 & -0,22 \\ -0,02 & 0,05 & 0,12 & 0,23 & 1 & 0,02 \\ -0,33 & -0,33 & -0,31 & -0,22 & 0,02 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (74)$$

Maximální korelační koeficient je pro totožný nebo opačný směr 0,33 (v absolutní hodnotě).

V případě nižší přesnosti měření budou korelační koeficienty nižší, neboť se sníží vliv centrace přístroje na stanovisku, např. pro přesnost měření šikmé délky $2\,mm$ je maximální korelační koeficient 0,16.

7 Vzájemná závislost různých typů měření na stanovisku

Jednotlivé typy určených hodnot na stanovisku jsou vzájemně závislé vlivem společné skutečné chyby centrace a určení výšky přístroje. Míra závislosti je dána zejména mírou ortogonality jednotlivých měření, resp. mírou ortogonality složek chyby centrace, která působí na jednotlivá měření. Stejným způsobem lze modelovat závislosti také pro různé typy měření na stanovisku, která jsou obecně také závislá, např. délka a směr apod. Kombinací je nepřeberné množství, zde bude ukázán jako ilustrativní případ měření vodorovného směru, šikmé délky a zenitového úhlu na dva cíle ($\varphi_1 = 0\,gon,\ \zeta_1 = 80\,gon,\ sd_1 = 52{,}6\,m$; $\varphi_2 = 50\,gon,\ \zeta_2 = 100\,gon,\ sd_2 = 50\,m$). Měření jsou do výpočtu zaváděna v uvedeném pořadí. Potom matice korelačních koeficientů vlivu centrace přístroje odvozená podle odstavce 3.3 má tvar:

$$\boldsymbol{r}_{sd} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,71 & 0,00 & 0,71 \\ 0 & 1 & 0 & -0,22 & 0,95 & 0,22 \\ 0 & 0 & 1 & -0,67 & -0,31 & 0,67 \\ 0,71 & -0,22 & -0,67 & 1 & 0 & 0 \\ 0,00 & 0,95 & -0,31 & 0 & 1 & 0 \\ 0,71 & 0,22 & 0,67 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (75)$$

Korelační koeficienty mezi jednotlivými typy měření na stejný cíl jsou nulové, což odpovídá jejich praktické vzájemné ortogonalitě. Kovariance mezi měřeními na různé cíle již nulové nejsou. Další hodnocení odpovídá výše uvedeným případům.

Závěrem je vhodné ještě poznamenat, že takto byla vyjádřena závislost určovaných veličin z jednoho stanoviska, avšak obdobným způsobem jsou závislé i veličiny určované např. na stejný cíl z různých stanovisek, pakliže je signalizace provedena jen jednou, a pokud „měření“ nejsou vzájemně kolmá.

8 Závěr

Zahrnutí vlivu přesnosti centrace a určení výšky přístroje a realizace by měl být nedílnou součástí rozborů přesnosti v inženýrsko geodetických úlohách. Byl zde uveden exaktní postup popisu těchto vlivů včetně jimi vnesených závislostí, které by při zcela exaktním dalším zpracování (např. vyrovnání) neměly být zanedbány.

Literatura

[1] Vaněček, J. - Štroner, M.: Experimentální určení přesnosti optické centrace. Geodetický a kartografický obzor. 2011, roč. 57, č. 6, s. 125-133. ISSN 0016-7096.

[2] Böhm, J. - Radouch, V. - Hampacher, M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. Geodetický a kartografický podnik Praha, 2. vydání, Praha, 1990. ISBN 80-7011-056-2.