

Obsah

Vytyčení polohy bodu polární metodou	2
1 Vliv měření na přesnost souřadnic	3
2 Vliv měření na polohovou a souřadnicovou směrodatnou odchylku	4
3 Vliv podkladu na přesnost souřadnic.....	5
4 Vliv centrace přístroje a cíle a realizace na přesnost souřadnic.....	6
5 Rozbor přesnosti před měřením.....	6
6 Rozbor přesnosti při měření	8
7 Rozbor přesnosti po měření	8

Vytyčení polohy bodu polární metodou

Vytyčení polohy bodu je základní a zásadně převažující metoda vytyčování v geodetické praxi. Rozbory přesnosti vycházejí z požadavků na přesnost umístění bodu v rovině, obvykle zadaných ve formě směrodatné odchylky souřadnicové nebo polohové. Směrodatná odchylka souřadnicová σ_{xy} a směrodatná odchylka polohová σ_p jsou dány vztahy:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2}}; \quad \sigma_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \quad (1)$$

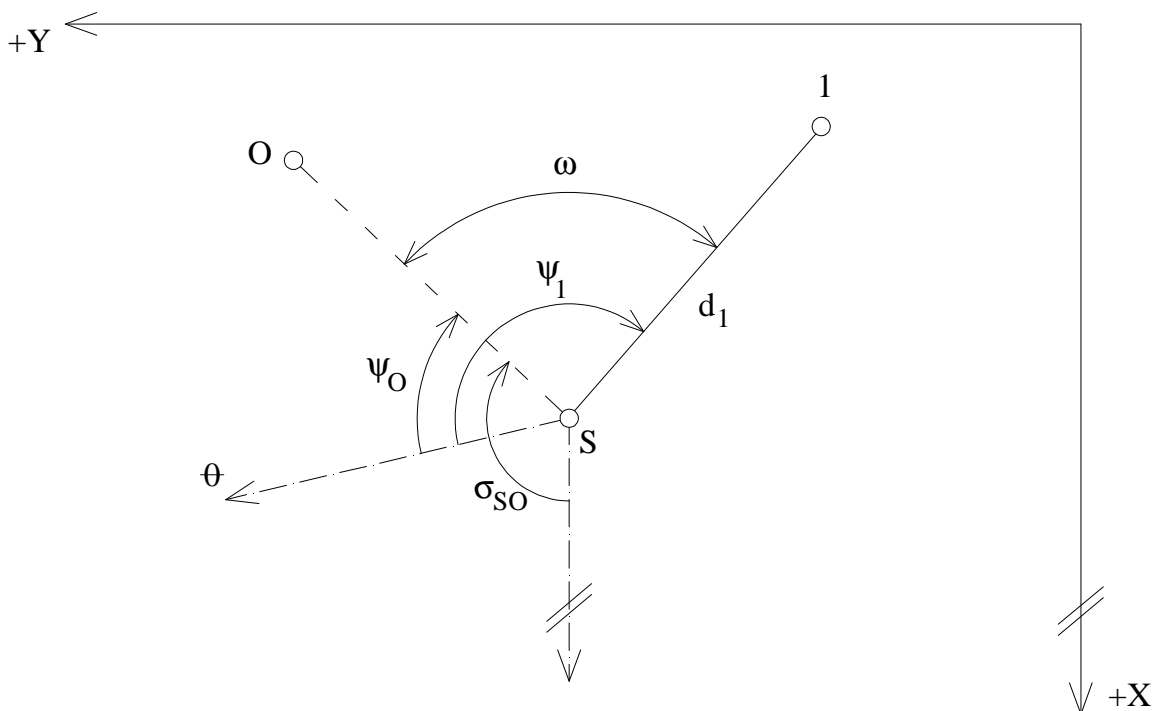
Rovnice pro výpočet souřadnic polární metodou vycházejí z Obr. 0.1 (vytyčovaný bod je označen jako číslo 1):

$$\begin{aligned} x &= x_S + d \cdot \cos(\sigma_{SO} + \omega) \\ y &= y_S + d \cdot \sin(\sigma_{SO} + \omega) \end{aligned} \quad (2)$$

kde x, y jsou souřadnice vytyčovaného bodu, x_S a y_S jsou souřadnice stanoviště S , d je určená vodorovná délka, ω je vodorovný úhel vypočtený z měření ψ_1 a ψ_0 , σ_{SO} je směrnik ze stanoviště S na orientaci O , který se určí:

$$\sigma_{SO} = \arctan\left(\frac{y_O - y_S}{x_O - x_S}\right) + o_K, \quad (3)$$

kde x_O a y_O jsou souřadnice orientace O , o_K je oprava ze zařazení do správného kvadrantu.



Obr. 0.1 Schema vytyčení polohy bodu

Obecný chybový model souřadnic bodu určeného polární metodou lze zapsat:

$$\mathbf{M}_{x,y} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & Cov_{x,y} \\ Cov_{x,y} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_{CR} + \mathbf{M}_{SO}, \quad (4)$$

kde \mathbf{M}_m je kovarianční matice popisující vliv měření, \mathbf{M}_{SO} je kovarianční matice popisující vliv přenosti souřadnic stanoviště S a orientace O (vliv podkladu) a \mathbf{M}_{CR} je kovarianční matice popisující vliv centrace přístroje a cíle a vliv realizace. Jednotlivé vlivy jsou vzájemně nezávislé, každý z nich působí mírně odlišným způsobem. Vliv podkladu nelze opakovaným měřením nikterak zmenšit, vliv centrace přístroje a cíle lze zmenšit opakovaným (nezávislým) měřením s novou centrací, vliv měření lze zmenšit opakovaným měřením. Postupně bude určení kovariančních matic vlivu měření a podkladu popsáno.

Ilustrativně lze výslednou kovarianční matici pro opakování jednotlivých měření (počet opakování n_m) a opakování celého měření/vytyčení (počet opakování n_c) popsat takto:

$$\mathbf{M}_{x,y} = \frac{1}{n_c} \cdot \left(\frac{1}{n_m} \cdot \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_{CR} \right) + \mathbf{M}_{SO}. \quad (5)$$

1 Vliv měření na přesnost souřadnic

Měřenými veličinami jsou vodorovná délka d a měřený vodorovný úhel ω . Matice parciálních derivací \mathbf{A}_m a kovarianční matice měření $\mathbf{M}_{d,\omega}$ pro aplikaci zákona hromadění směrodatných odchylek:

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial d} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial d} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sigma_{SO} + \omega) & -d \cdot \sin(\sigma_{SO} + \omega) \\ \sin(\sigma_{SO} + \omega) & d \cdot \cos(\sigma_{SO} + \omega) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_{d,\omega} = \begin{pmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_\omega^2}{\rho^2} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

kde $\omega = \psi_1 - \psi_0$ a tedy $\sigma_\omega^2 = \sigma_{\psi_1}^2 + \sigma_{\psi_0}^2$. Kovarianční matice popisující vliv měřených veličin se určí:

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{A}_m \cdot \mathbf{M}_{d,\omega} \cdot \mathbf{A}_m^T, \quad (8)$$

platí:

$$\mathbf{M}_m = \begin{pmatrix} \sigma_{xm}^2 & Cov_{xym} \\ Cov_{yxm} & \sigma_{ym}^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

kde

$$\sigma_{xm}^2 = \sigma_d^2 \cdot \cos^2(\sigma_{S1}) + d^2 \cdot \sin^2(\sigma_{S1}) \cdot \left(\frac{\sigma_\omega}{\rho} \right)^2, \quad (10)$$

$$\sigma_{ym}^2 = \sigma_d^2 \cdot \sin^2(\sigma_{S1}) + d^2 \cdot \cos^2(\sigma_{S1}) \cdot \left(\frac{\sigma_\omega}{\rho} \right)^2, \quad (11)$$

$$Cov_{xym} = Cov_{yxm} = \sin(\sigma_{S1}) \cdot \cos(\sigma_{S1}) \cdot \left(\sigma_d^2 - \left(d \cdot \frac{\sigma_\omega}{\rho} \right)^2 \right). \quad (12)$$

Takto lze zhodnotit vliv přesnosti měření na přesnost určení souřadnic bodu polární metodou. Kovariance je nutnou součástí výsledku výpočtu v případě další práce s přesností souřadnic, neboť pouze při měření ve směru jedné souřadnicové osy je rovna nule. Lze to dokázat na základě odvození výpočtu velikosti a stočení poloos elipsy chyb.

Po dosazení předchozích rovnic do rovnice pro výpočet úhlu stočení lze po roznásobení, elementárních úpravách a použití vzorců pro dvojnásobný argument $\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ a $\cos(2 \cdot \alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ získat rovnost úhlu stočení elipsy chyb a směrníku měření. Po dosazení předchozích rovnic do rovnice pro výpočet hlavní a vedlejší poloosy elipsy chyb platí:

$$\sigma_a^2 = \sigma_d^2, \quad (13)$$

$$\sigma_b^2 = d^2 \cdot \left(\frac{\sigma_\omega}{\rho}\right)^2. \quad (14)$$

2 Vliv měření na polohovou a souřadnicovou směrodatnou odchylku

V některých případech není třeba uvažovat chyby podkladu, neboť například vytyčovací síť je natolik přesná, že se její přesnost v přesnosti výsledku neprojeví. Pak lze odvozovat vliv přesnosti měření přímo pro souřadnicovou či polohovou odchylku. Chybu v centraci přístroje a cíle lze do výpočtu zavést tak, že se započítá do přesnosti měření. Je důležité, že prostým opakováním měření délky a směru se tento vliv nezmenšuje. Vliv realizace se obvykle do výpočtu zavádí samostatně přímo v rozboru přesnosti.

Skutečné chyby souřadnic v závislosti (pouze) na chybách měření (z rovnice (2)):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_d \cdot \cos(\sigma_{SO} + \omega) - d \cdot \sin(\sigma_{SO} + \omega) \cdot \frac{\varepsilon_\omega}{\rho} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_d \cdot \sin(\sigma_{SO} + \omega) + d \cdot \cos(\sigma_{SO} + \omega) \cdot \frac{\varepsilon_\omega}{\rho}. \end{aligned} \quad (15)$$

Dále bude značeno $\sigma_{SO} + \omega = \sigma$. Skutečná polohová odchylka:

$$\varepsilon_p^2 = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2, \quad (16)$$

kde

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 &= \varepsilon_d^2 \cdot \cos^2(\sigma) + d^2 \cdot \sin^2(\sigma) \cdot \left(\frac{\varepsilon_\omega}{\rho}\right)^2 - 2 \cdot d \cdot \cos(\sigma) \cdot \sin(\sigma) \cdot \varepsilon_d \cdot \frac{\varepsilon_\omega}{\rho} \\ \varepsilon_y^2 &= \varepsilon_d^2 \cdot \sin^2(\sigma) + d^2 \cdot \cos^2(\sigma) \cdot \left(\frac{\varepsilon_\omega}{\rho}\right)^2 + 2 \cdot d \cdot \cos(\sigma) \cdot \sin(\sigma) \cdot \varepsilon_d \cdot \frac{\varepsilon_\omega}{\rho}. \end{aligned} \quad (17)$$

Po sečtení se odečtou smíšené členy, po vytknutí se získá tvar:

$$\varepsilon_p^2 = \varepsilon_d^2 \cdot (\cos^2(\sigma) + \sin^2(\sigma)) + \left(\frac{\varepsilon_\omega}{\rho}\right)^2 \cdot d^2 \cdot (\cos^2(\sigma) + \sin^2(\sigma)). \quad (18)$$

Z toho po jednoduché úpravě:

$$\varepsilon_p^2 = \varepsilon_d^2 + \left(\frac{\varepsilon_\omega}{\rho}\right)^2 \cdot d^2. \quad (19)$$

Směrodatná odchylka polohová:

$$\sigma_P = \sqrt{\sigma_d^2 + \left(\frac{\sigma_\omega}{\rho}\right)^2 \cdot d^2}. \quad (20)$$

Směrodatná odchylka souřadnicová:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_d^2 + \left(\frac{\sigma_\omega}{\rho}\right)^2 \cdot d^2\right)}. \quad (21)$$

Z předchozích vzorců vyplývá, že při uvážení pouze vlivu měření polohová ani souřadnicová odchylka nejsou závislé na směru měření a závisí pouze na velikosti směrodatných odchylek měření úhlu a délky a na vzdálenosti, na kterou se měří.

3 Vliv podkladu na přesnost souřadnic

Přesnost souřadnic vytyčovací sítě spoluurčuje přesnost umístění a natočení výsledných vytyčovaných prvků. Po zaměření a vyrovnání vytyčovací sítě jsou známy směrodatné odchytky určených souřadnic, resp. kovarianční matice popisující přesnost výsledku. V některých případech je známa určitá aproximace tohoto vyjádření, průměrná souřadnicová odchylka či průměrná polohová odchylka, pak je nutné využít zjednodušení popisu přesnosti pomocí kružnice chyb bez kovariancí. Výpočet kovarianční matice vlivu podkladu M_{SO} :

$$M_{SO} = A_{SO} \cdot M_{XY} \cdot A_{SO}^T, \quad (22)$$

kde M_{XY} je kovarianční matice popisující přesnost podkladu a A_{SO} je matice derivací vztahů (2) ve tvaru:

$$M_{XY} = \begin{pmatrix} \sigma_{xS}^2 & Cov_{xYS} & Cov_{xSxO} & Cov_{xSYO} \\ Cov_{xYS} & \sigma_{yS}^2 & Cov_{ySxO} & Cov_{ySYO} \\ Cov_{xSxO} & Cov_{ySxO} & \sigma_{xO}^2 & Cov_{xYO} \\ Cov_{xSYO} & Cov_{ySYO} & Cov_{xYO} & \sigma_{yO}^2 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$A_{SO} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial xS} & \frac{\partial x}{\partial yS} & \frac{\partial x}{\partial xO} & \frac{\partial x}{\partial yO} \\ \frac{\partial y}{\partial xS} & \frac{\partial y}{\partial yS} & \frac{\partial y}{\partial xO} & \frac{\partial y}{\partial yO} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Jednotlivé derivace mají tvar:

$$\frac{\partial x}{\partial xS} = 1 - \Delta y_{SP} \cdot \frac{\Delta y_{SO}}{d_{SO}^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial yS} = \Delta y_{SP} \cdot \frac{\Delta x_{SO}}{d_{SO}^2}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial x}{\partial xO} = \Delta y_{SP} \cdot \frac{\Delta y_{SO}}{d_{SO}^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial yO} = -\Delta y_{SP} \cdot \frac{\Delta x_{SO}}{d_{SO}^2}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial y}{\partial xS} = \Delta x_{SP} \cdot \frac{\Delta y_{SO}}{d_{SO}^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial yS} = 1 - \Delta x_{SP} \cdot \frac{\Delta x_{SO}}{d_{SO}^2}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = -\Delta x_{SP} \cdot \frac{\Delta y_{SO}}{d_{SO}^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial y_0} = \Delta x_{SP} \cdot \frac{\Delta x_{SO}}{d_{SO}^2}. \quad (28)$$

4 Vliv centrace přístroje a cíle a realizace na přesnost souřadnic

Tento vliv je z matematického hlediska obdobný jako nepřesnost samotných souřadnic podkladu s tím, že je nutné započítat ještě vliv realizace ve tvaru kovarianční matice \mathbf{M}_R :

$$\mathbf{M}_{CR} = \mathbf{A}_C \cdot \mathbf{M}_C \cdot \mathbf{A}_C + \mathbf{M}_R, \quad (29)$$

kde

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} \sigma_{xR}^2 & Cov_{xyR} \\ Cov_{yxR} & \sigma_{yR}^2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Kovarianční matice popisující přesnost centrace přístroje na stanovisku a cíle na orientačním bodě (nulové prvky matice vyjadřují vzájemnou nezávislost centrace přístroje a cíle):

$$\mathbf{M}_C = \begin{pmatrix} \sigma_{xSC}^2 & Cov_{xys} & 0 & 0 \\ Cov_{xys} & \sigma_{ySC}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{xOC}^2 & Cov_{xyO} \\ 0 & 0 & Cov_{xyO} & \sigma_{yOC}^2 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

Matice derivací:

$$\mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_S} & \frac{\partial x}{\partial y_S} & \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_S} & \frac{\partial y}{\partial y_S} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Vliv realizace se obvykle popisuje kružnicí chyb, např. o poloměru $\sigma_r = 1 \text{ mm}$.

5 Rozbor přesnosti před měřením

Účelem rozboru přesnosti před měřením je výběr vhodného přístrojového vybavení a vhodného počtu opakování měření jednotlivých veličin. V takto komplexně popsané úloze nelze jednoznačně nalézt řešení, je nutné postupovat iteračně.

Často bývá požadovaná přesnost zadána pouze relativně k bodům vytyčovací sítě, případně vliv nepřesnosti sítě a případně i centrace přístroje a cíle lze zanedbat například vzhledem k požadované přesnosti vytyčení, případně je započítat do nepřesnosti měřených veličin. Pak lze rozbor přesnosti zjednodušit a provést dále popsaným způsobem.

Zadána obvykle mezní odchylka souřadnicová δ_{xy} , ze které se směrodatná odchylka souřadnicová σ_{xy} určí podle známého vzorce:

$$\sigma_{xy} = \frac{\delta_{xy}}{u_p}, \quad (33)$$

kde $u_p = 2,5$ pro pravděpodobnost 95%, neboť se jedná o dvourozměrné odchylky.

V případě, že bude kontrola vytyčení prováděna dvojným vytyčením stejné přesnosti, směrodatná odchylka souřadnicová jednoho vytyčení σ_{xy0} se určí

$$\sigma_{xy0} = \sigma_{xy} \cdot \sqrt{2}. \quad (34)$$

Pro směrodatnou odchylku souřadnicovou bodu určeného polární metodou – vliv pouze měření – platí vzorec (21). Z hlediska významu jednotlivých členů je lze zapsat:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_d^2 + \left(\frac{\sigma_\omega}{\rho} \right)^2 \cdot d^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (\sigma_p^2 + \sigma_q^2)}, \quad (35)$$

kde σ_p je směrodatná odchylka vytyčení v podélném směru a σ_q v příčném směru. Je zde nutné uvážit chybu z realizace bodu σ_r a chybu z centrace přístroje σ_{cP} a cíle na orientaci σ_{cO} . Pak platí:

$$\sigma_p^2 = \sigma_d^2 + \sigma_{cP}^2 + \sigma_r^2, \quad (36)$$

$$\sigma_q^2 = \left(\left(\frac{\sigma_\omega}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cO}}{d_o} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cP}}{d} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cP}}{d_o} \right)^2 \right) \cdot d^2 + \sigma_r^2, \quad (37)$$

kde d_o je vodorovná vzdálenost stanovisko – orientace. Pro zjednodušení je zde zanedbána závislost působení chyby centrace na levé a pravé rameno úhlu a je uveden nejhorší možný případ.

Je vhodné konstatovat, že při vhodně zvolené vzdálené orientaci je chybu z centrace cíle na orientaci možné zanedbat (0,5 mm na vzdálenost 50 činí 0,6 mgon, což je pro účely běžného vytyčování hodnota zanedbatelná), je nutné také dodržet zásadu, že orientace je vzdálenější nežli vytyčovaný bod.

Pro souřadnicovou směrodatnou odchylku platí:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left((\sigma_d^2 + \sigma_{cP}^2 + \sigma_r^2) + \left(\left(\frac{\sigma_\omega}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cO}}{d_o} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cP}}{d} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cP}}{d_o} \right)^2 \right) \cdot d^2 + \sigma_r^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left((\sigma_d^2 + \sigma_{cP}^2) + \left(\left(\frac{\sigma_\omega}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cO}}{d_o} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cP}}{d} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cP}}{d_o} \right)^2 \right) \cdot d^2 + 2 \cdot \sigma_r^2 \right)}. \quad (38)$$

Při rozboru přesnosti před měřením je známa σ_{xy} , podle její hodnoty a znalosti situace při vytyčování se zvolí přístroj a další pomůcky a tedy pro další výpočet jsou známy všechny hodnoty předchozí rovnice kromě přesnosti měření úhlů a délky, ty lze ovlivnit počtem opakování. Platí tedy:

$$2 \cdot \sigma_{xy}^2 - \left(2 \cdot \sigma_r^2 + \sigma_{cP}^2 + \left(\left(\frac{\sigma_{cO}}{d_o} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cP}}{d} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{cP}}{d_o} \right)^2 \right) \cdot d^2 \right) = \left(\frac{\sigma_\omega}{\rho} \right)^2 \cdot d^2 + \sigma_d^2. \quad (39)$$

Pravou stranu rovnice nelze jednoznačně vypočítat a velikost přesnosti měření délky a úhlu je nutné zvolením příslušného počtu opakování měření určit tak, aby pravá strana byla menší nebo rovna levé.

Zde je vhodné konstatovat, že vzhledem k tomu, že veličiny měříme vždy v celém počtu opakování a při výpočtu počtu opakování se zaokrouhluje vždy nahoru (mechanismu výpočtu je uveden v odstavci, prakticky vždy se měří s přesností vyšší, nežli je požadovaná a to s přesností očekávanou. Nicméně pro úspěšné dokončení úlohy je důležitá přesnost požadovaná.

V případě, kdy směrodatná odchylka v příčném směru σ_q významně převyšuje směrodatnou odchylku v podélném směru σ_p nebo naopak, tj. platí:

$$\frac{\sigma_p^2}{\sigma_q^2} \geq 10 \text{ nebo } \frac{\sigma_q^2}{\sigma_p^2} \geq 10, \text{ tj. } \frac{\sigma_p}{\sigma_q} \geq 3 \text{ nebo } \frac{\sigma_q}{\sigma_p} \geq 3, \quad (40)$$

Ize menší směrodatnou odchylku zanedbat, neboť se prakticky neuplatní. Pak lze rozbor přesnosti degradovat na jednorozměrnou úlohu. Tato varianta však při použití elektronických dálkoměrů a běžné vzdálenosti vytyčení menší než 100 m nenastane.

Při řešení lze také zvolit $\sigma_q = \sigma_p$ (charakteristika rozptylu vytyčovaného bodu je kružnice chyb), což je obdobné zásadě stejného vlivu. Zejména pro krátké vzdálenosti vytyčení vzhledem k nižší chybě v příčném směru tato volba nebývá výhodná.

6 Rozbor přesnosti při měření

Při rozboru přesnosti při měření se kontroluje vzájemný soulad opakovaných přímo měřených veličin statistickými testy, zejména se využívá kritérium mezního rozdílu pro dvě opakování měření a při větším počtu McKay – Nairův test.

7 Rozbor přesnosti po měření

Kontroluje se kvalita vytyčeného bodu, při dvojitým vytyčení stejné přesnosti mezním rozdílem v podélném Δ_{Mp} a příčném směru Δ_{Mq} , kde platí:

$$\Delta_{Mp} = u_p \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_p, \quad (41)$$

$$\Delta_{Mq} = u_p \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_q. \quad (42)$$

Testují se zvláště oba směry (podélný a příčný) a tedy se jedná o veličiny jednorozměrné. V případě vyššího počtu opakování (např. z důvodu vysoké požadované přesnosti nebo z důvodu nesplnění kritéria pro dvě vytyčení a přidání dalšího) se používá test mezní výběrové směrodatné odchylky v podélném a příčném směru, výběrová směrodatná odchylka musí být menší nežli mezní směrodatná odchylka pro pravděpodobnost 95% ve tvaru:

$$s_{Mp} = \sigma_p \cdot \sqrt{\frac{2}{n'}}, \quad (43)$$

$$s_{Mq} = \sigma_q \cdot \sqrt{\frac{2}{n'}}, \quad (44)$$

kde n' je počet nadbytečných měření.