3. Hodnocení přesnosti měření a vytyčování. Odchylky a tolerance ve výstavbě.

3.1 Úvod o měření obecně
3.2 Chyby měření a jejich dělení
- 3.2.1 Omyly a hrubé chyby
- 3.2.2 Systematické chyby
- 3.2.3 Náhodné chyby

3.3 Výpočet charakteristiky přesnosti měření
3.4 Zpracování přímých měření stejné přesnosti
3.5 Zpracování přímých měření nestejné přesnosti
3.6 Příklady na zpracování výsledků přímých měření
3.7 Zákon hromadění směrodatných odchylek
3.8 Příklady na aplikaci ZHSO
3.9 Vybrané pojmy z geometrické přesnosti staveb
3.10 Vytyčovací odchylky ve výstavbě

3.1 Úvod o měření obecně.

V geodézii měříme především délky, úhly, a dále také např. čas, velikost síly tíže apod. Výsledek měření je charakterizován číslem, závislým též na volbě jednotek.

Ze zkušenosti platí : opakuje – li se měření téže veličiny, tak i při sebevětší pečlivosti jsou získány obecně různé výsledky. Je to tím, že žádné měření nelze izolovat od mnoha rušivých vlivů, hlavně :

- nedokonalost našich smyslů,
- nedokonalost přístrojů,
- vnější vlivy,
- nedostatečná znalost všech okolností, které způsobují chyby měření atd.

3.1 Úvod o měření obecně.

Omezováním chyb např. využitím přesnějšího přístroje lze snížit jejich vliv, a tak zvýšit přesnost měření. Proměnlivé, velmi početné, a nejen proto v podstatě nepostižitelné vlivy určují číselně výsledek měření, který je v určitých mezích náhodnou (libovolnou a nepředvídatelnou) veličinou. Rozdílnost výsledků měření vyplývá z fyzikální podstaty prostředí.

Při měření a jeho zpracování je hledána nejspolehlivější hodnota výsledku měření, odhadována její přesnost a meze její spolehlivosti. Měřením či zpracováním měření NIKDY nezískáme skutečnou hodnotu veličiny, vždy se jedná o odhad.

3.2 Chyby měření a jejich dělení.

Výsledek každého měření je nevyhnutelně zatížen skutečnou chybou ε, která je souhrnem působení jednotlivých vlivů. Skutečnou chybu měření ε_i lze vyjádřit pomocí skutečné (správné) hodnoty veličiny X a měřené hodnoty l_i:

$$\boldsymbol{\varepsilon_i = X - l_i}$$

Chyby měření :
- hrubé chyby a omyly,
- nevyhnutelné (náhodné, systematické).

3.2 Chyby měření a jejich dělení.

3.2.1 Omyly a hrubé chyby

Omyly nejsou způsobeny objektivními podmínkami měření, ale nesprávnými úkony měřiče (omyl, nepozornost, špatná manipulace s přístrojem apod.) Hrubé chyby mohou vznikat nakupením nepříznivých vlivů nebo jejich neobvyklou velikostí jako např. silný vítr nebo vibrace obrazu cíle v dalekohledu.

Měření s těmito chybami jsou v příkrém rozporu s kontrolními měřeními - je nutné dvojí měření nebo měření nadbytečných hodnot.

Nejsou chybami nevyhnutelnými a dále nejsou uvažovány.

3.2 Chyby měření a jejich dělení.

3.2.2 Systematické chyby.

Vznikají z jednostranně působících příčin,za stejných podmínek ovlivňují měření ve stejném smyslu, tj. chyba měření má stejné znaménko i velikost.

Dále je lze dělit na :

- konstantní (při každém měření stejné znaménko i velikost, např. chybná délka pásma),
- proměnlivé (jejich vliv se mění v závislosti na podmínkách měření, např. na teplotě atmosféry apod., jejich vliv může mít i různá znaménka).

Systematické chyby je možno potlačit seřízením (rektifikací) přístrojů a pomůcek před měřením a vhodnou metodikou zpracování měření.

3.2 Chyby měření a jejich dělení.

3.2.2 Náhodné chyby.

Takové chyby, které při stejné měřené veličině, metodě měření, podmínkách a pečlivosti, náhodně nabývají různé velikosti i znaménka. Jednotlivě nemají žádné zákonitosti a jsou vzájemně nezávislé, nepředvídatelné a nezdůvodnitelné.
Ve větších souborech (vícekrát opakované měření) se však již řídí jistými statistickými zákonitostmi.
Náhodné chyby stejného druhu mají charakter náhodné veličiny s normálním rozdělením pravděpodobnosti.

3.2 Chyby měření a jejich dělení.

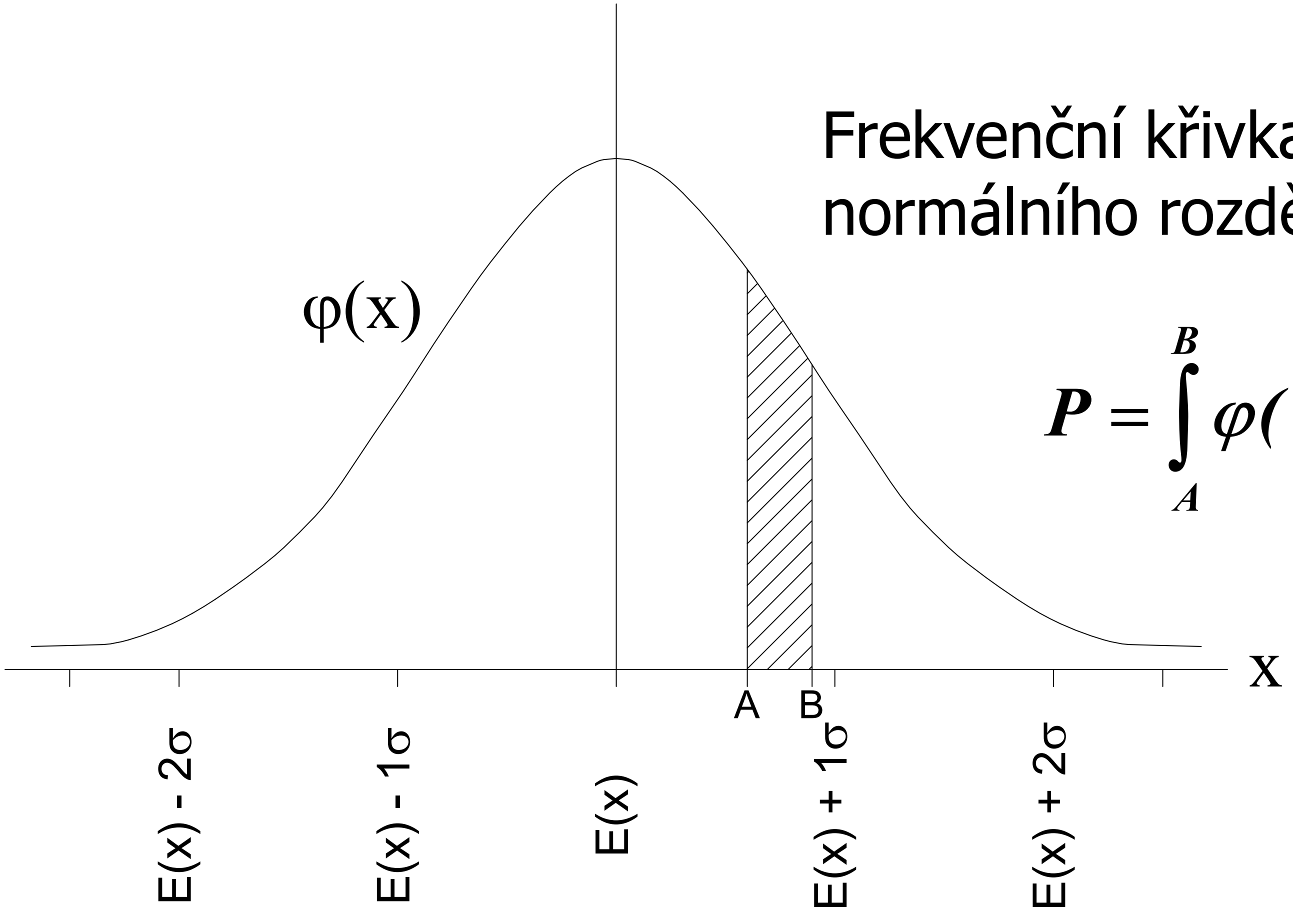
Vlastnosti náhodných chyb :

- pravděpodobnost vzniku kladné či záporné chyby určité velikosti je stejná,
- malé chyby jsou pravděpodobnější (četnější) než velké,
- chyby nad určitou mez se nevyskytují (resp. považujeme je za hrubé).

Hustota pravděpodobnosti $\varphi(x)$ (také frekvenční funkce) normálního rozdělení $N(E(x),\sigma^2)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\{x-E(x)\}^2}{2\sigma^2}}, x \in (-\infty, \infty).$$

3.2 Chyby měření a jejich dělení.



$$P = \int_A^B \varphi(x)\,dx$$

Pravděpodobnost P, že měření bude zatíženo chybou o velikosti padnoucí do intervalu <A;B> je rovna ploše vyšrafované v grafu.

3.2 Chyby měření a jejich dělení.

Několik hodnot pravděpodobností P, charakterizujících normální rozdělení :

A	B	P
$E(x)$	$E(x) + \sigma$	0,341
$E(x) - \sigma$	$E(x) + \sigma$	**0,682**
$E(x)$	$E(x) + 2\sigma$	0,477
$E(x) - 2\sigma$	$E(x) + 2\sigma$	**0,954**
$E(x)$	$E(x) + 3\sigma$	0,499
$E(x) - 3\sigma$	$E(x) + 3\sigma$	**0,997**
$E(x) - \infty$	$E(x) + \infty$	1,000

3.2 Chyby měření a jejich dělení.

Co to je směrodatná odchylka σ ?

Je to parametr popisující normální rozdělení. Ve vztahu k měření je to charakteristika přesnosti. Z hlediska chyb měření je třeba vždy tuto charakteristiku interpretovat s ohledem na předchozí tabulku, a tedy si uvědomit, že např. v intervalu $< -2\sigma ; 2\sigma >$ od měřené hodnoty se vyskytuje hledaná hodnota geometrického parametru s pravděpodobností 95 % (za předpokladu, že měření mají normální rozdělení).

Výsledkem vlivu náhodných a systematických chyb je skutečná chyba měření : $\varepsilon_i = \Delta_i + c_i$

3.3 Výpočet charakteristiky přesnosti měření.

Jako charakteristika přesnosti měření se téměř výhradně využívá směrodatná odchylka σ.

Druhy směrodatných odchylek :

základní : z velkého souboru měření, kde n $\rightarrow \infty$,
výběrová : ze souboru menšího.

Výpočet :

$$\sigma = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2}}{n}}$$

$$\varepsilon_i = X - l_i$$

3.4 Zpracování přímých měření stejné přesnosti

Při praktickém měření kromě několika málo specifických případů skutečnou hodnotu neznáme a v takovémto případě je jako nejpravděpodobnější odhad skutečné hodnoty možno použít aritmetický průměr $\bar{l}$. Rozdíly průměrné hodnoty a jednotlivých měření jsou pak nazývány opravami $\mathbf{v_i}$, ze kterých se počítá výběrová směrodatná odchylka σ, přesněji vyjádřeno, její odhad.

Výpočet platí pro měření stejné přesnosti (= stejné váhy rovné jedné).

$$\sigma = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2}{n-1}} \qquad \bar{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n} \qquad v_i = \bar{l} - l_i$$

3.4 Zpracování přímých měření stejné přesnosti.

Směrodatná odchylka je také náhodná veličina – pokud provedeme stejně např. 2 x 10 měření a vypočteme dvakrát směrodatnou odchylku, obecně nebude stejná. Jen pro ilustraci je zde uveden vzorec pro výpočet odhadu směrodatné odchylky směrodatné odchylky.

$$\sigma_{\sigma} = \sigma \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{n}'}}$$

kde n′ je nadbytečný počet měření, zde n′ = (n1).

n	2	3	5	10	20	50	100	500
1/√(2n’)	0,71	0,50	0,35	0,24	0,16	0,10	0,07	0,03

3.4 Zpracování přímých měření stejné přesnosti.

Pokud je známa směrodatná odchylka jednoho měření a bylo měřeno vícekrát, směrodatná odchylka průměrné hodnoty se vypočte podle vzorce

$$\sigma_{\bar{l}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

3.5 Zpracování přímých měření nestejné přesnosti.

Pokud měření nemají stejnou přesnost a tato přesnost je známa, je nutno zvolit jiný postup zpracování. Hodnota výsledku měření je pak získána jako vážený průměr

$$\overline{l} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Váhy se určují :

$$p_i = \frac{c}{\sigma_i^2}$$, kde c je volená konstanta.

3.5 Zpracování přímých měření nestejné přesnosti.

Směrodatná odchylka hodnoty určené váženým průměrem se vypočte

$$\sigma_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i (n-1)}}$$

, kde opravy se vypočtou

$$v_i = \bar{l} - l_i$$

3.6 Příklady na zpracování výsledků přímých měření.

<u>Příklad 1 :</u> Délka byla měřena opakovaně pětkrát za stejných podmínek a stejnou metodou (= se stejnou přesností). Vypočtěte průměrnou délku, přesnost jednoho měření a přesnost průměru.

i	l / m	v / m	vv / m^2
1	**5,628**	-0,0014	1,96E-06
2	**5,626**	0,0006	3,60E-07
3	**5,627**	-0,0004	1,60E-07
4	**5,624**	0,0026	6,76E-06
5	**5,628**	-0,0014	1,96E-06
Σ	28,133	0,000	1,12E-05

$\bar{l}$ = 5,6266 m, σ_{l_i} = 0,0017 m, $\sigma_{\bar{l}}$ = 0,00075 m

3.6 Příklady na zpracování výsledků přímých měření.

<u>Příklad 2 :</u> Délka byla měřena opakovaně pětkrát různými metodami (= s různou přesností). Vypočtěte průměrnou délku a přesnost průměru.

i	l / m	σ / m	p	l . p	v / m
1	**5,628**	0,0030	0,69	3,908	-0,0013
2	**5,626**	0,0020	1,56	8,791	0,0007
3	**5,627**	0,0025	1,00	5,627	-0,0003
4	**5,624**	0,0035	0,51	2,869	0,0027
5	**5,628**	0,0025	1,00	5,628	-0,0013
Σ			4,77	26,823	

Volba c = $0{,}0025^2$, $\bar{l}$ = 5,6267 m, $\sigma_{\bar{l}}$ = 0,00056 m

3.7 Zákon hromadění směrodatných odchylek.

V mnoha případech nelze nebo není výhodné přímo měřit určovanou hodnotu, a tato se pak určuje zprostředkovaně – čili výpočtem z jiných měřených hodnot. Příkladem může být plocha trojúhelníka, jsou-li měřeny dvě strany a úhel.
Potřebujeme nejen vypočítat hledanou hodnotu, ale také určit její směrodatnou odchylku. Známe – li funkční vztah mezi veličinami, dokážeme ji vypočítat pomocí zákona hromadění směrodatných odchylek (ZHSO).

ZHSO vychází ze zákona hromadění skutečných chyb, který je založen na totálním diferenciálu funkčního vztahu.

3.7 Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Zákon hromadění skutečných chyb :
Funkční vztah :

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ..., x_k)$$

Platí :

$$y + \varepsilon_y = f\left(x_1 + \varepsilon_{x_1}, x_2 + \varepsilon_{x_2}, x_3 + \varepsilon_{x_3}, ..., x_k + \varepsilon_{x_k}\right)$$

Vzhledem k tomu, že skutečné chyby jsou oproti měřeným hodnotám velmi malé, lze rozvinout pravou stranu vztahu podle Taylorova rozvoje s omezením pouze na členy prvního řádu.

$$y + \varepsilon_y = f(x_1, ..., x_k) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_{x_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}\varepsilon_{x_k}$$

3.7 Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Zákon hromadění skutečných chyb :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_{x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\varepsilon_{x_3} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\varepsilon_{x_k}$$

Skutečné chyby měřených veličin zpravidla neznáme, ale známe jejich směrodatné odchylky a Zákon hromadění směrodatných odchylek je dán vztahem :

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{x_k}^2$$

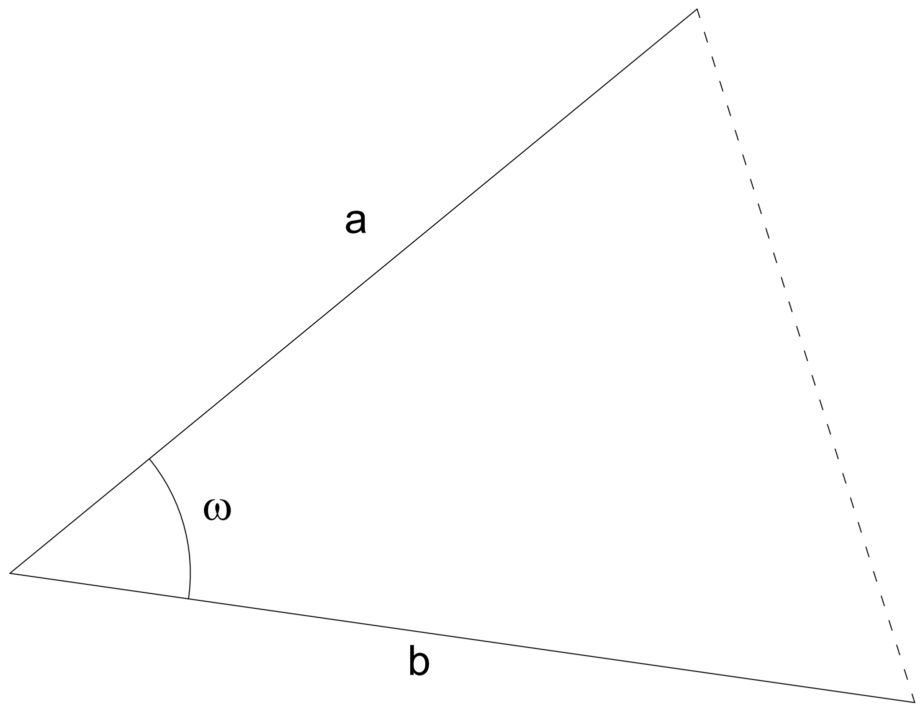
3.7 Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Zákon hromadění směrodatných odchylek platí za následujících podmínek :

1. Jednotlivé měřené veličiny, a tedy i jejich skutečné chyby, musí být vzájemně nezávislé.
2. Skutečné chyby mají náhodný charakter, jejich znaménko a velikost se řídí normálním rozdělením.
3. Chyby jsou oproti měřeným hodnotám malé, parciální derivace musí zůstat prakticky konstantní, změní - li se měřené hodnoty o hodnoty chyb.
4. Jednotlivé členy musí mít stejný fyzikální rozměr.

3.8 Příklady na aplikaci ZHSO.

Příklad 1 : Jsou známy dvě délky a = 34,352 m, b = 28,311 m, které byly změřeny se $\sigma_a = \sigma_b = 0{,}002$m. Dále byl změřen úhel $\omega = 52{,}3452°$, $\sigma_\omega = 0{,}0045°$. Určete směrodatnou odchylku plochy trojúhelníka.



3.8 Příklady na aplikaci ZHSO.

Funkční vztah :

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin(\omega)$$

Skutečné chyby :

$$\varepsilon_P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot sin(\omega) \cdot \varepsilon_a + \frac{1}{2} \cdot a \cdot sin(\omega) \cdot \varepsilon_b +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot cos(\omega) \cdot \varepsilon_\omega \cdot \frac{\pi}{180°}$$

$$\left(\rho° = \frac{180°}{\pi} \right)$$

3.8 Příklady na aplikaci ZHSO.

Směrodatné odchylky :

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot b\cdot sin(\omega)\right)^2\cdot\sigma_a^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot sin(\omega)\right)^2\cdot\sigma_b^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot cos(\omega)\right)^2\cdot\frac{\sigma_\omega^2}{\left(\rho^\circ\right)^2}$$

Úprava pro $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_d$:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(b^2 + a^2\right)\cdot sin^2(\omega)\cdot\sigma_d^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\cdot\left(a\cdot b\cdot cos(\omega)\right)^2\cdot\frac{\sigma_\omega^2}{\left(\rho^\circ\right)^2}$$

Po dosazení : σ_P = 0,043 m^2, P = 384,983 m^2.

3.8 Příklady na aplikaci ZHSO.

<u>Příklad 2 :</u> Odvoďte vzorec pro směrodatnou odchylku průměru z n měření, znáte-li směrodatnou odchylku jednoho měření σ_l.

Funkční vztah :

$$\bar{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{l_1 + l_2 + \dots l_n}{n}$$

Zákon hromadění skutečných chyb :

$$\varepsilon_{\bar{l}} = \frac{1}{n}\left\{\varepsilon_{l_1} + \varepsilon_{l_2} + \dots + \varepsilon_{l_n}\right\}$$

Víme, že všechna měření mají stejnou směrodatnou odchylku. O skutečných chybách ale nevíme nic (je to náhodná veličina) a proto NELZE závorku zjednodušit. Obecně platí : $\varepsilon_{l_1} \neq \varepsilon_{l_2} \neq \dots \neq \varepsilon_{l_n}$

3.8 Příklady na aplikaci ZHSO.

Zákon hromadění směrodatných odchylek :

Ze zadání víme, že všechna měření mají stejnou směrodatnou odchylku. Proto platí :

$$\sigma_{l_1} = \sigma_{l_2} = \ldots = \sigma_{l_n} = \sigma_l$$

$$\sigma_{\bar{l}}^2 = \frac{1}{n^2}\left\{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2 + \ldots + \sigma_{l_n}^2\right\} = \frac{1}{n^2}\left(n \cdot \sigma_l^2\right) = \frac{\sigma_l^2}{n}$$

3.9 Vybrané pojmy z geometrické přesnosti staveb.

Základní hodnota geometrického parametru	Hodnota uvedená v projektové dokumentaci.
Skutečná hodnota g.p.	Hodnota ve skutečnosti.
Skutečná odchylka	Rozdíl mezi projektovanou a měřenou hodnotou.
Mezní odchylka	Největší přípustná odchylka pro výsledky měření.
Přesnost kontrolního měření	Odvíjí se od požadované přesnosti určení geometrického parametru.