

# Teorie chyb a vyrovnávací počet 1 (155TCVI)

**Přednášející:** prof. Ing. Martin Štroner, Ph.D.

**Místnost:** B912

**Email:** [martin.stroner@fsv.cvut.cz](mailto:martin.stroner@fsv.cvut.cz)

**www 1:** [k154.fsv.cvut.cz/vyuka/geodezie\\_geoinformatika/tcv1.php](http://k154.fsv.cvut.cz/vyuka/geodezie_geoinformatika/tcv1.php)

**www 2:** <http://k154.fsv.cvut.cz/~stroner/TCh1/>

# Teorie chyb a vyrovnávací počet 1 (155TCVI)

**Přednášející:** prof. Ing. Martin Štroner, Ph.D.

## Literatura

- [1] Hampacher, M. - Štroner, M.: Zpracování a analýza měření v inženýrské geodézii. 2. vyd. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, ČVUT v Praze, 2015. 336 s. ISBN 978-80-01-05843-5.
- [2] Böhm, J. - Radouch, V. - Hampacher, M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. GKP, Praha 1990. ISBN 80-7011-056-2.
- [3] Koch, K. R.: Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. Springer Verlag, Berlin, 1999, ISBN 978-3-540-65257-1.
- [4] Hampacher, M. - Radouch, V.: Teorie chyb a vyrovnávací počet 10, 20. Příklady a návody ke cvičení. ČVUT v Praze, 2000, ISBN 80-01-02250-1
- [5] Hampacher, M. - Radouch, V.: Teorie chyb a vyrovnávací počet 10. ISBN: ČVUT v Praze, 1997, ISBN 80-01-01704-4

# Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

## Témata přednášek

1. Úvod do předmětu. Chyby měření. Charakteristiky náhodných veličin.
2. Vybraná rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin. Bodové a intervalové odhady. Testování shody rozdělení.
3. Zákon hromadění skutečných chyb, směrodatných odchylek.
4. Dvou a vícerozměrné chyby a charakteristiky přesnosti. Vyrovnání měření. Vyrovnání měření přímých. Dvojice měření.
5. Metoda nejmenších čtverců. Vyrovnání měření zprostředkujících.
6. Vyrovnání měření zprostředkujících – příklady.
7. Vyrovnání měření zprostředkujících – přehled postupu vyrovnání, kontroly.
8. Vyrovnání podmínkových měření.
9. Vyrovnání zprostředkujících s podmínkami.
10. Vyrovnání geodetické sítě. Vyrovnání sítě volné, vázané.
11. Regresní a korelační analýza - lineární regrese.
12. Testování statistických hypotéz.
13. Závěr, ke zkoušce.

# Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

## Téma č. 1: **Úvod.**

1. Úvod do předmětu.
2. Vlastnosti měření.
3. Chyby měření a jejich dělení, úplná chyba měření.
4. Charakteristiky náhodných veličin
  - Polohy,
  - přesnosti,
  - Šikmosti,
  - Špičatosti.

## 1. Úvod do předmětu.

Základy teorie chyb měření

**Výsledek měření = hodnota (v jednotkách)**

Měření má nějaký technický účel, k něčemu se výsledky měření použijí, a tedy musí mít nějakou vypovídací hodnotu = kvalitu, spolehlivost.

**Kvalita. Spolehlivost. Přesnost. Důvěryhodnost. Využitelnost**

Technicky je tedy nutné popsat kvalitu dat.

**Měření + Přesnost = Výsledek geodetických prací**

**CO JE TO TEDY PŘESNOST?**

### 2. Vlastnosti měření.

V geodézii měříme především délky, úhly, plochy, výšky, velikost síly tíže a čas; výsledek měření charakterizujeme číslem, závislým též na volbě jednotky.

Od počátku měřických prací mají měřiči stále stejnou zkušenost: **opakujeme-li měření téže veličiny, pak i při sebevětší pečlivosti dostaneme obecně různé výsledky.**

Vysvětlení: žádné měření nemůžeme izolovat od mnoha rušivých vlivů. Jsou to nedokonalost našich smyslů a přístrojů, vnější vlivy a nedostatečná znalost všech okolností, které působí nevyhnutelné měřické chyby. **Přesnějším přístrojem, zkušeností, volbou příznivých vnějších podmínek a pečlivým měřením můžeme pouze snižovat jejich vliv a tím zvýšit přesnost měření.**

Všechno dění v přírodě je v neustálém pohybu a změnách při vzájemné souvislosti všech jevů. Proměnlivé a počtem nepostižitelné podmínky určují číselný výsledek měření, který je proto náhodnou veličinou; **v určitých mezích může nabývat náhodně libovolné a nepředvídatelné hodnoty.**

**Vyrovnávacím počtem hledáme nejspolehlivější hodnotu výsledku měření, určujeme meze její spolehlivosti a odhadujeme přesnost měření.**

## 2. Vlastnosti měření.

**Výsledkem měření je tedy náhodná veličina.**

(V jistých mezích, které tedy nějak technicky potřebujeme vyjádřit.)

Využíváme dále poznatky a nástroje matematické statistiky, které doplňujeme technickým přístupem a znalostí okolností a zvláštních vlastností měření.

V dalším průběhu se budeme soustředit na aplikaci poznatků na konkrétní geodetické problémy, teoretické základy matematické statistiky jsou obsahem jiného předmětu.

### 3. Chyby měření a jejich dělení, úplná chyba měření.

Každá naměřená hodnota  $l_i$  obsahuje ve výsledném čísle chybu  $\varepsilon_i$ , která buď zmenšila, nebo zvětšila výsledek měření proti skutečné (pravé) hodnotě  $L$  určité měřené veličiny. Skutečná chyba  $\varepsilon_i$  ve výsledku jednotlivých měření je tedy rozdíl mezi skutečnou a naměřenou hodnotou.

$$\varepsilon_i = L - l_i$$

Protože při opakovaných měřeních téže veličiny učiníme převážně pokaždé jinou chybu, dostaneme obecně různé naměřené hodnoty

$$l_1 = L - \varepsilon_1, \quad l_2 = L - \varepsilon_2, \quad l_n = L - \varepsilon_n$$



### 3. Chyby měření a jejich dělení, úplná chyba měření.

Skutečná (pravá) hodnota měření

$$L = l_i + \varepsilon_i$$

Skutečná chyba obsahuje všechny elementární (jednotlivé) chyby vznikající z různých příčin. Vzhledem různému charakteru se chyby dělí:

#### **Chyby odstranitelné**

- Omyly
- Hrubé chyby

#### **Chyby nevyhnutelné**

- Chyby náhodné
- Chyby systematické

### 3. Chyby měření a jejich dělení, úplná chyba měření.

#### Omyly

- Omyly nejsou způsobeny objektivními podmínkami měření, nýbrž nesprávnými úkony měřiče (omylem, nepozorností, špatnou manipulací s přístrojem). Nepatří proto mezi chyby nevyhnutelné. Jsou častější u měřičů nezkušených, avšak nebývá jich ušetřen ani zkušený měřič, zejména při únavě. Patří sem např. údaje na stupnici nesprávně čtené o jeden nebo více dílků stupnice, zacílení na jiný bod, opomenutí urovnání libely při nivelaci, náraz o stativ přístroje během měření, chybné znaménko nebo mylný zápis naměřené hodnoty aj.

#### Hrubé chyby a odlehlá měření

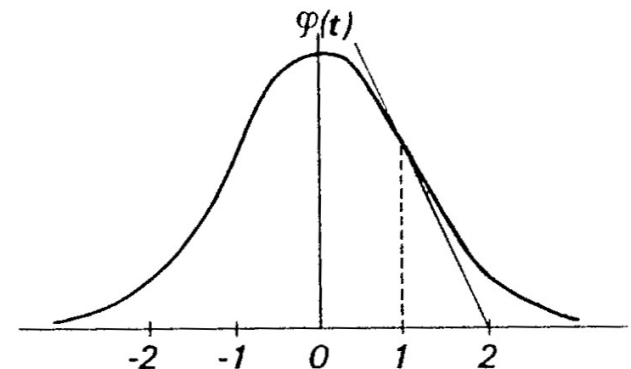
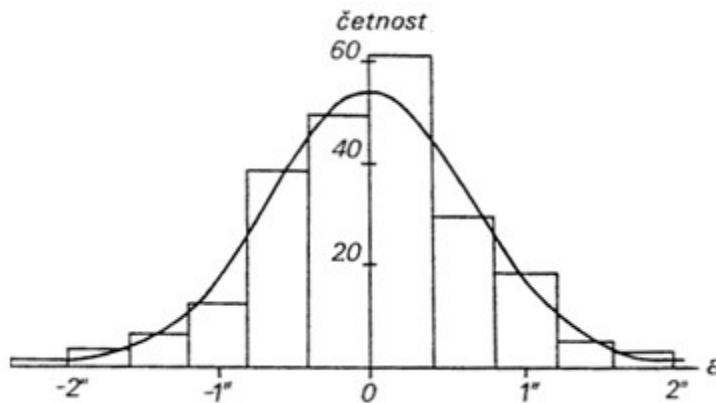
- Při kvapném měření nebo za nepříznivých okolností (otřesy přístroje větrem, silné kroucení stativu přístroje vlivem slunce, příliš velké chvění obrazu cíle v dalekohledu ap.) způsobí některá příčina příliš velkou chybu a výsledek nápadně vybočuje z řady měření. Hrubé chyby vznikají i bez zásahu měřiče u automatických systémů vlivem nepříznivého nakupení vlivů a chyb nebo např. vnějšími vlivy (konfigurace družic u GNSS apod.).

Tyto chyby jsou vzhledem k velikosti běžných chyb velké a tedy je lze identifikovat a měření vyřadit. Při zpracování měření je však vždy nutné počítat s jejich přítomností.<sup>10</sup>

### 3. Chyby měření a jejich dělení, úplná chyba měření.

#### Chyby náhodné

- při stejné měřené veličině, metodě i při stejných podmínkách a pečlivosti měření mohou náhodně nabývat různé velikosti i různého znaménka. Jejich možné hodnoty oscilují kolem nuly. Jednotlivě nemají žádné zákonitosti a jsou vzájemně nezávislé, jsou nepředvídatelné a nezdůvodnitelné.
- Typickým příkladem je chyba v cílení (pointace) na neklidný obraz cíle, jeho nepřesné rozpůlení svíslou rýskou, čtení, urovnání libely, odhad desetin dílku, přiřazení měřítka, provázení jeho konce olovnicí, chyba ze zaokrouhlování apod.
- V geodézii ze zkušenosti víme, že malé chyby jsou četnější než velké, pravděpodobnost kladné a záporné chyby je stejná. Předpokládáme, že náhodné chyby jsou ze souboru s normálním rozdělením (viz další přednášky).



### 3. Chyby měření a jejich dělení, úplná chyba měření.

#### Chyby systematické

- Původ systematických chyb je zpravidla v některém faktoru, který při určitých stejných podmínkách měření (např. stejná teplota, osoba nebo přístroj) ovlivňuje ve stejném smyslu měření opakovaně. Chyby v takové skupině měření obsahují stejnou systematickou složku a jsou do určité míry vzájemně závislé (korelované). Jejich klasifikačním měřítkem je způsob působení v čase nebo v prostoru na skupinu měření téhož druhu.
- Konstantní systematická chyba se uplatňuje při každém měření stejným znaménkem i stejnou velikostí, takže ji nepoznáme při opakovaném měření téže veličiny. Příkladem je měření délky pásmem o domnělé délce  $L$ , kdežto neznámá skutečná délka je  $L + c$  (též kolimační chyba pro určitý úhel, chyba indexová, cílení na chybně excentrický cíl apod.).

### 3. Chyby měření a jejich dělení, úplná chyba měření.

- Proměnlivá systematická chyba souvisí s proměnlivou podmínkou měření. Některé systematické chyby mohou nabývat i různého znaménka: např. refrakční chyba během dne i noci, přičemž nenulová konstantní složka je dána konfigurací terénu v okolí stanoviště a podél záměry. Jiná je chyba jednostranná, která mění hodnotu od měření k měření, ale je stále stejného znaménka (chyba z náklonu nivelační latě nebo z vybočení měřítka vždy zvětšuje výsledek proti skutečnosti, podobně chyba osobní v půlení cíle nebo v registraci času).
- Proměnlivá systematická chyba může být přímo závislá na konkrétní okolnosti, např. vlivem teploty - protažení pásma, chyba elektronicky měřené délky v atmosféře. Může být také závislá na měřené hodnotě (cyklická chyba na vodorovném kruhu teodolitu), nepřesně vyznačená délka pásma apod.

**Skutečná (úplná) chyba se skládá ze složky náhodné a systematické, přičemž se každá řídí jinými zákony.**

$$\varepsilon_i = \Delta_i + c_i$$

## 4. Charakteristiky náhodných veličin.

Soubor i charakteristiky jsou dle počtu měření

- **Základní** – soubor obsahuje **nekonečně** mnoho údajů
- **Výběrové** – soubor obsahuje **konečně** mnoho údajů

Souvisí to opět s tím, že pokud je menší než nekonečný soubor měření, je jeho obsah náhodný a tedy i charakteristiky jsou náhodné. Lze opět určovat charakteristiky těchto charakteristik.

Jako charakteristiky se používají centrální momenty. K-tý centrální moment:

$$\mu_k = E(E(x) - x)^k$$

(což pro měření stejné přesnosti znamená  $\mu_k = \frac{\sum v_i^k}{n}$  .

## 4. Charakteristiky náhodných veličin.

### Poloha

- Odhad pravé (správné, ideální) hodnoty ze souboru měření.

střední hodnota  $E(x)$   
(aritmetický průměr)

$$E(x) = \sum_{x_i} x_i \cdot P(x_i) \qquad E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi(x) dx$$

$$x_{AP} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Medián = hodnota, která dělí soubor na dvě stejné poloviny.

Modus = hodnota s nejvyšší četností.

Jsou i další odhady polohy, které se však v geodézii nepoužívají – např. harmonický průměr apod.

## 4. Charakteristiky náhodných veličin.

### Přesnost (proměnlivost)

- ukazují, jakým způsobem se měřené hodnoty kumulují kolem střední hodnoty.

Variance

$$V(x) = E\{x - E(x)\}^2 = \sigma^2$$

Směrodatná odchylka = střední chyba

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{E\{x - E(x)\}^2} \qquad \sigma^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n} \qquad s^2 = \frac{[vv]}{n'}$$

Průměrná chyba

$$\bar{v}_{|1|} = \frac{[|\varepsilon|]}{n}$$

Pravděpodobná chyba

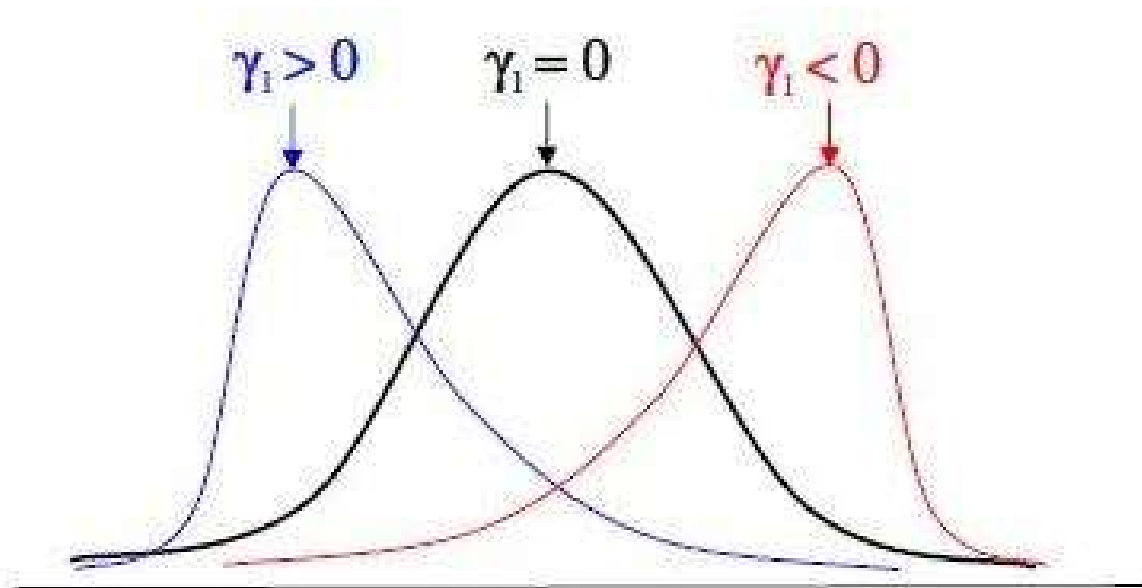
- Uprostřed řady při seřazení podle absolutní velikosti.



## 4. Charakteristiky náhodných veličin.

### Šikmost

$$A = \mu_3(t) = \frac{\mu_3(x)}{\sigma^3}$$

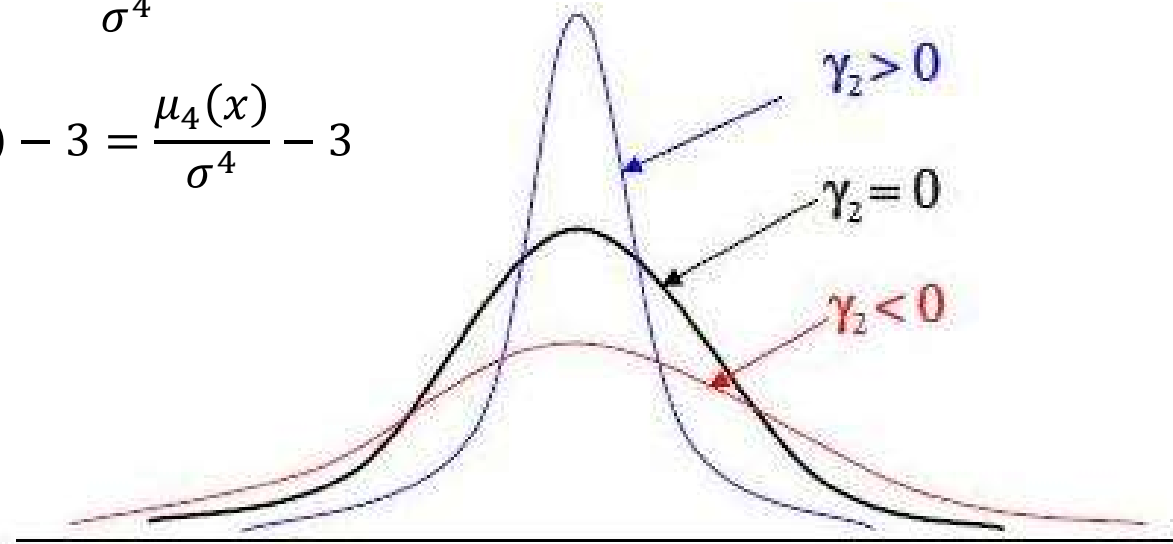


## 4. Charakteristiky náhodných veličin.

### Špičatost

$$\mu_4(t) = \frac{\mu_4(x)}{\sigma^4}$$

$$\mu_4(t) - 3 = \frac{\mu_4(x)}{\sigma^4} - 3$$



😊 **Konec** 😊