Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

Téma č. 2: **Vybraná rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin. Bodové a intervalové odhady. Testování shody rozdělení.**

1. Rozdělení pravděpodobnosti.
   1. Rovnoměrné rozdělení.
   2. Normální rozdělení.
   3. Chí-kvadrát.
   4. Studentovo rozdělení.
   5. Fisherovo rozdělení.
2. Bodové a intervalové odhady.
3. Základy statistického testování.
4. Testování shody rozdělení.

1. Rozdělení pravděpodobnosti.

- Rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny je pravidlo, kterým každému jevu popisovanému touto veličinou přiřazujeme určitou pravděpodobnost.
- Je charakterizováno tabulkou, grafem nebo funkčním předpisem.

- Součet pravděpodobností všech možných hodnot $\sum P(x) = 1$.

- Rozdělení pravděpodobnosti může být diskrétní nebo spojité.

- Pro popis rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny se vytváří:
  - Frekvenční (pravděpodobnostní) funkce $P(x)$ – popisuje pravděpodobnost jednotlivých jevů, tedy jevu x přiřazuje pravděpodobnost P
  - Distribuční funkce $F(x)$ – načítaná pravděpodobnost jevu od nejmenší možné hodnoty x_0 až po x

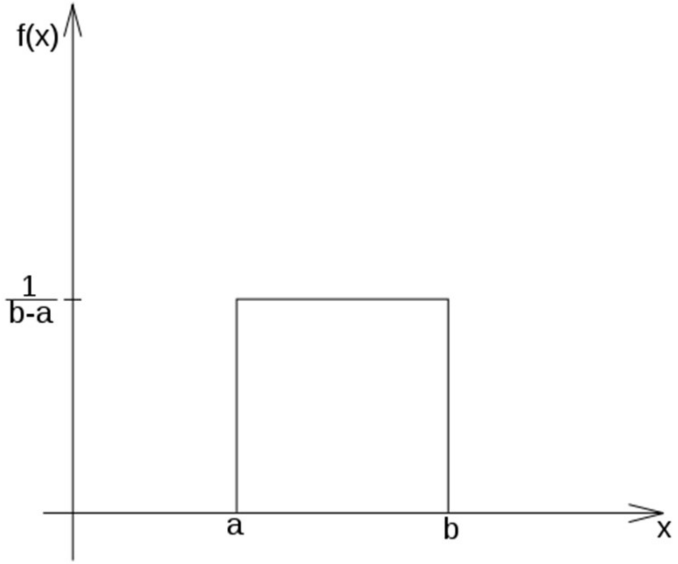
1.1 Rovnoměrné rozdělení.

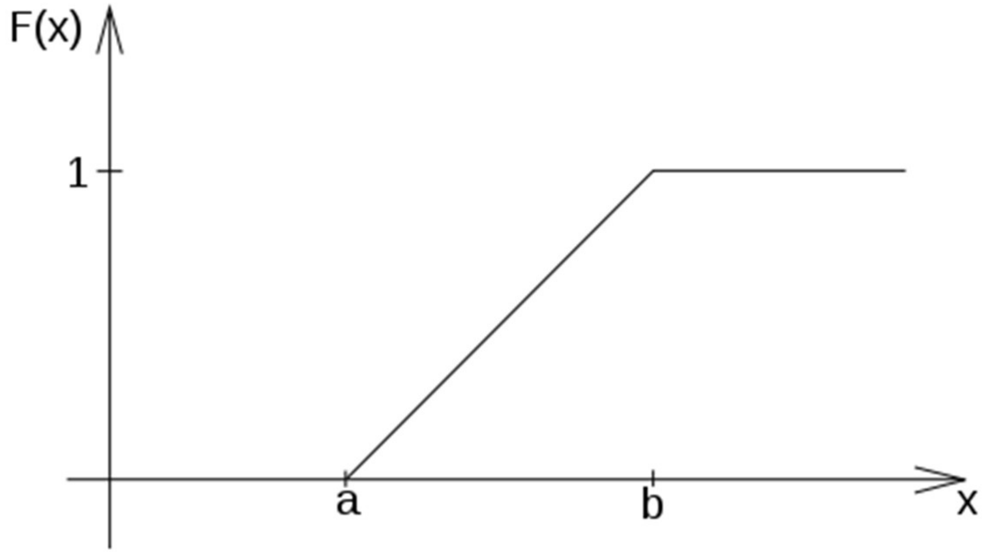
(Dle https://cs.wikipedia.org/wiki/Rovnoměrné_rozdělení)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{pro } x \in (a,b) \\ 0 & \text{pro } x \notin (a,b) \end{cases} \qquad \mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pro } a < x < b \\ 1 & \text{pro } x \geq b \end{cases}$$

$$E(x) = \int x \cdot f(x)dx \qquad \sigma^2 = \mathrm{E}\left(\left(x - E(x)\right)^2\right)$$

$$E(x) = \sum x_i \cdot p_i$$



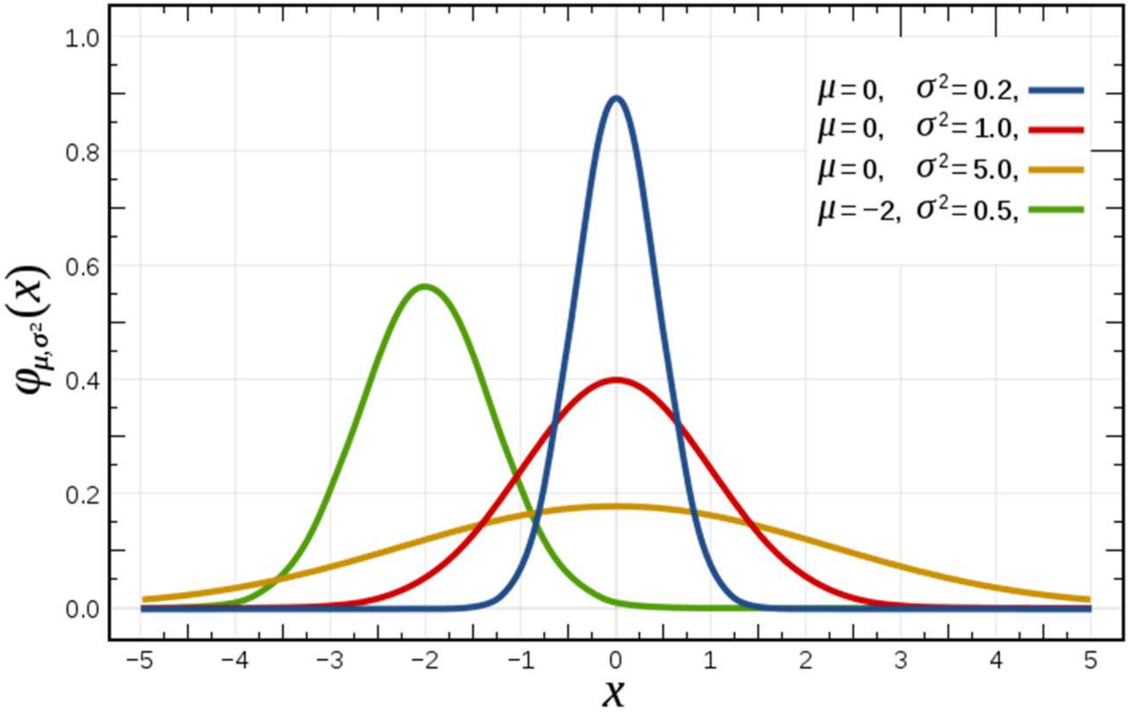


1.2 Normální rozdělení.

Toto rozdělení je použitelné všude tam, kde kolísání náhodné veličiny je způsobeno součtem velkého počtu nepatrných a vzájemně nezávislých vlivů.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-E(x))^2}{2\cdot\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

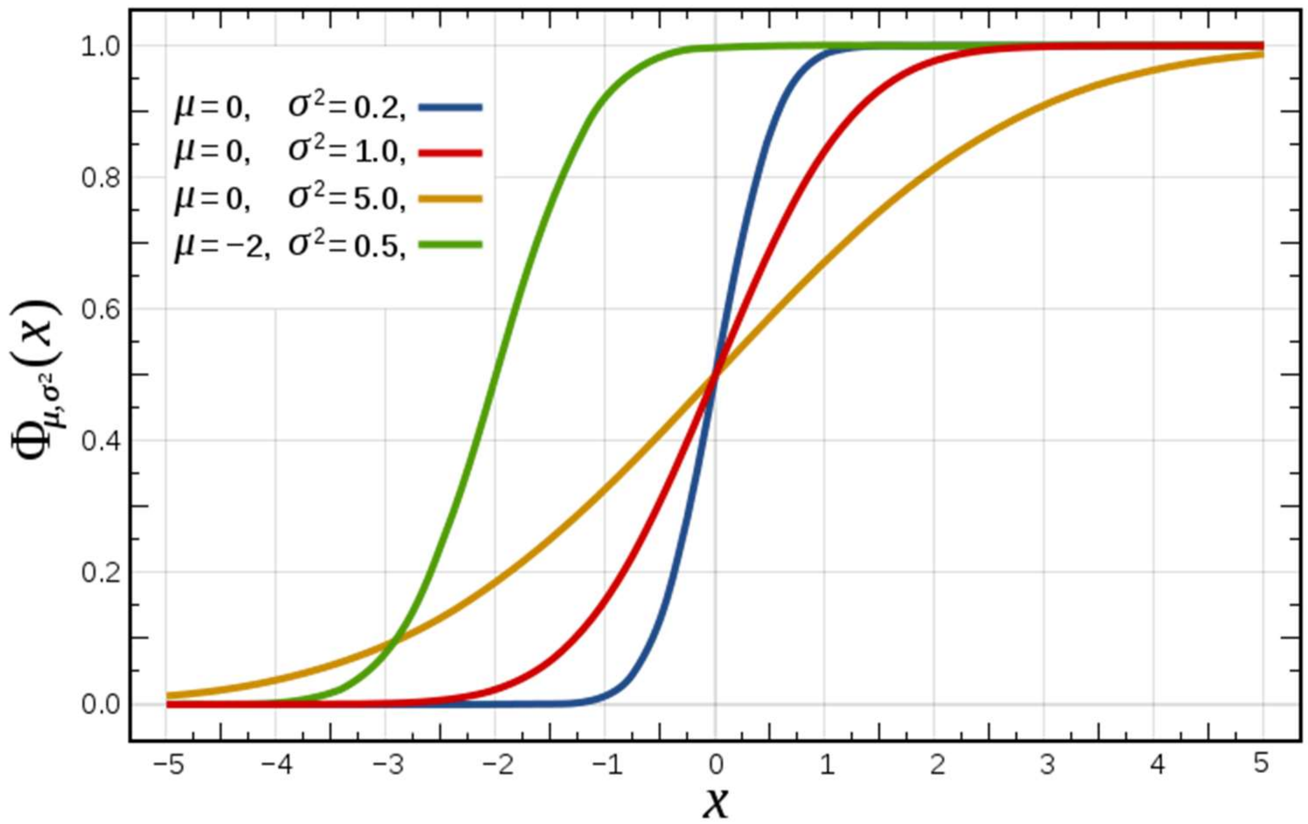
Tato frekvenční funkce má dva parametry a to střední hodnotu $E(x)$ (může být libovolná) a varianci $V(x) = E\{x - E(x)\}^2 = \sigma^2$. Normální rozdělení značíme $N(E(x), \sigma^2)$.



1.2 Normální rozdělení.

Distribuční funkce:

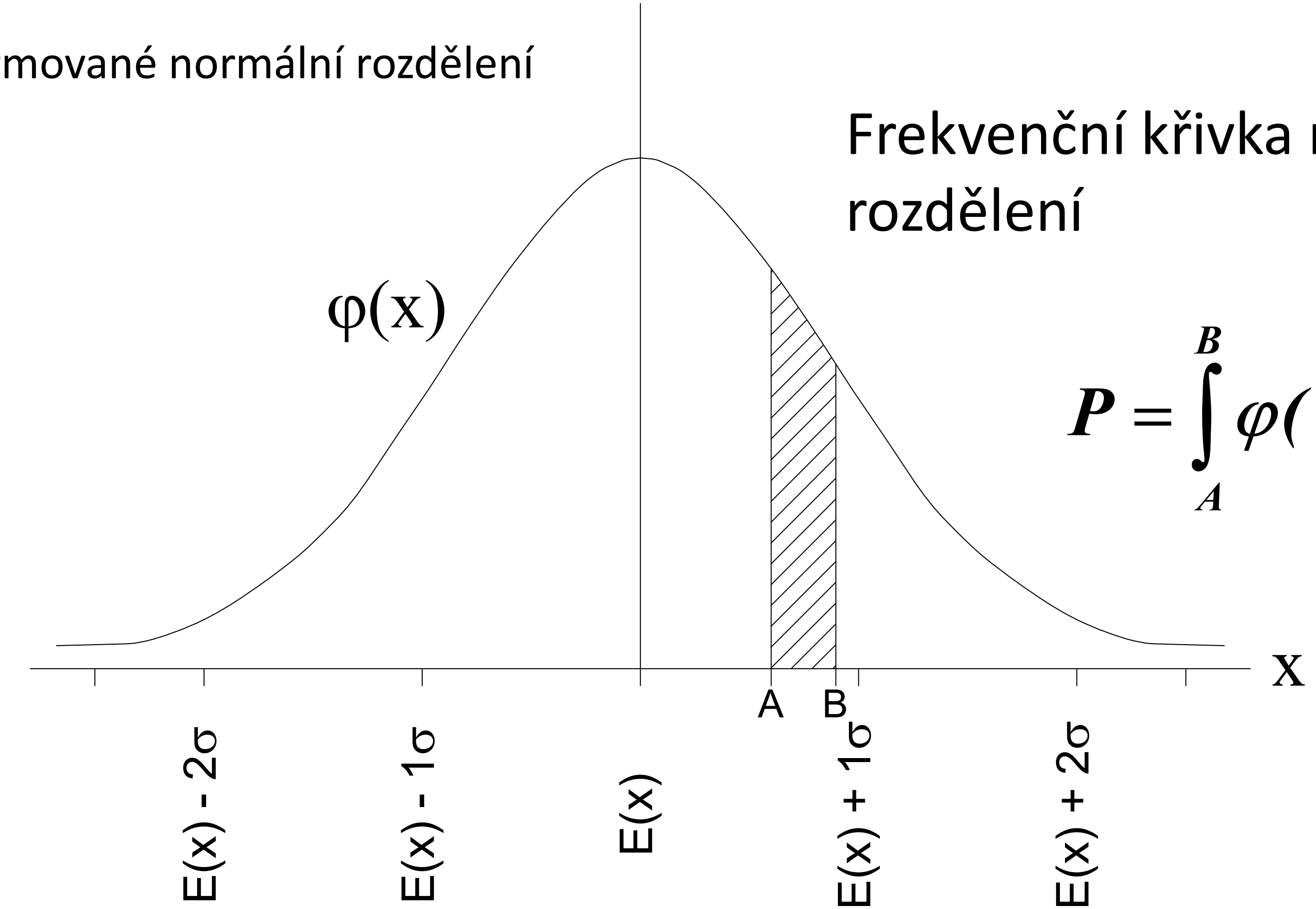
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx$$



1.2 Normální rozdělení.

Normované normální rozdělení

Frekvenční křivka normálního rozdělení



$$P = \int_A^B \varphi(x)dx$$

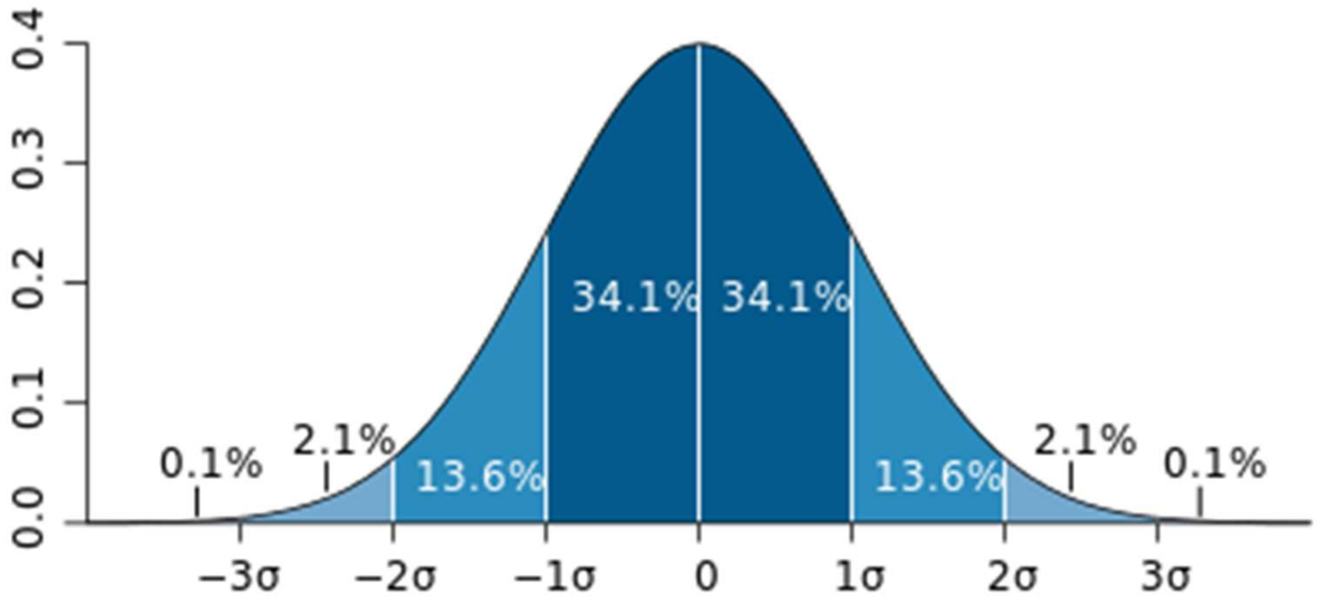
Pravděpodobnost P, že měření bude zatíženo chybou o velikosti padnoucí do intervalu <A;B> je rovna ploše vyšrafované v grafu.

1.2 Normální rozdělení.

Normované normální rozdělení – je tabelováno, platí zde $\sigma = 1$ a $E(x) = 0$.
Transformace z obecného na normované $N(0,1)$:

$$t = \frac{\left(x - E(x)\right)}{\sigma}$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$



1.2 Normální rozdělení.

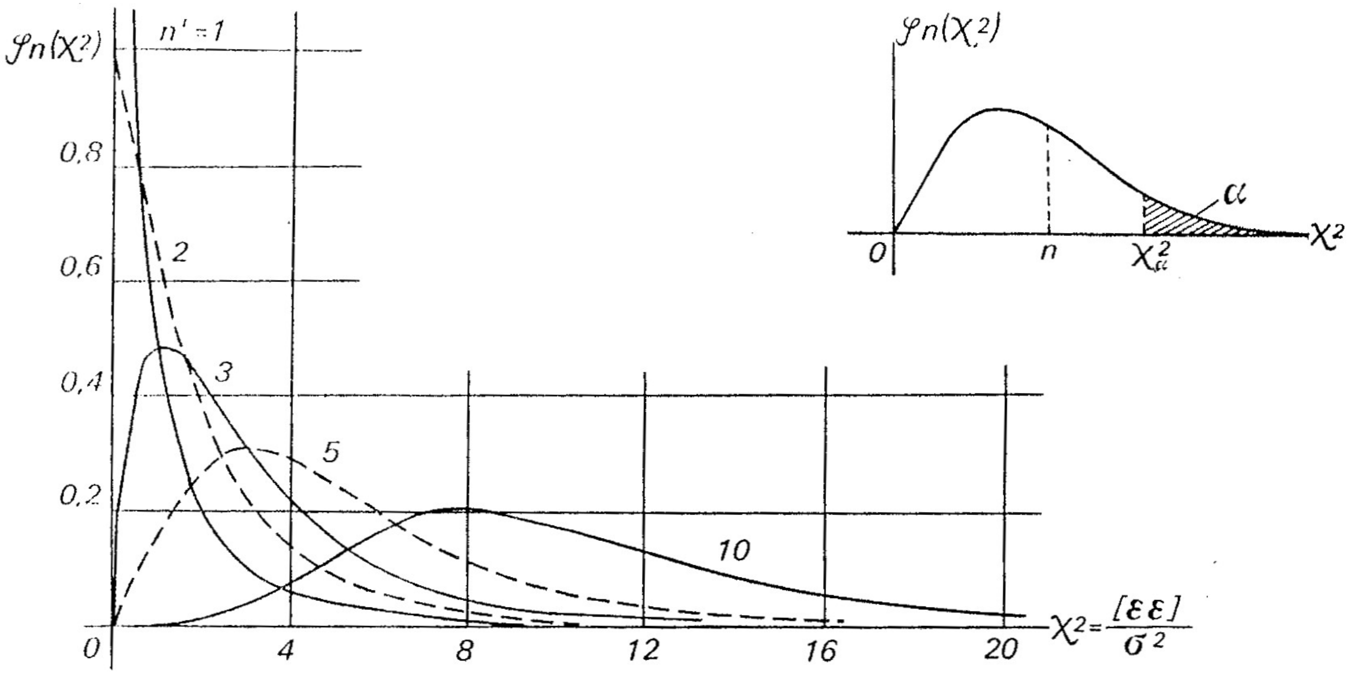
Normované normální rozdělení

A	B	P
E(x)	E(x) + σ	0,341
E(x) – σ	E(x) + σ	**0,682**
E(x)	E(x) + 2σ	0,477
E(x) –2σ	E(x) + 2σ	**0,954**
E(x)	E(x) + 3σ	0,499
E(x) – 3σ	E(x) + 3σ	**0,997**
E(x) – ∞	E(x) + ∞	1,000

1.3 χ^2 (Chí-kvadrát) rozdělení.

Uvažujme n' náhodných veličin $U_1, U_2, \dots, U_{n'}$, které jsou vzájemně nezávislé a každá z nich má normální rozdělení $N(0; 1)$. Potom rozdělení součtu čtverců má chí-kvadrát rozdělení.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n'} U_i^2 \qquad \varphi_{n'}(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n'}{2}}\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n'}{2}-1}$$



1.3 χ^2 (Chí-kvadrát) rozdělení.

Rozdělení se s rostoucím n blíží k normálnímu rozdělení se střední hodnotou n a rozptylem $2n$. Využívá se pro testování shody rozdělení a pro určení intervalu spolehlivosti výběrové směrodatné odchylky (směrodatná odchylka má toto rozdělení).

Pokud platí $N(0;\sigma^2)$, pak

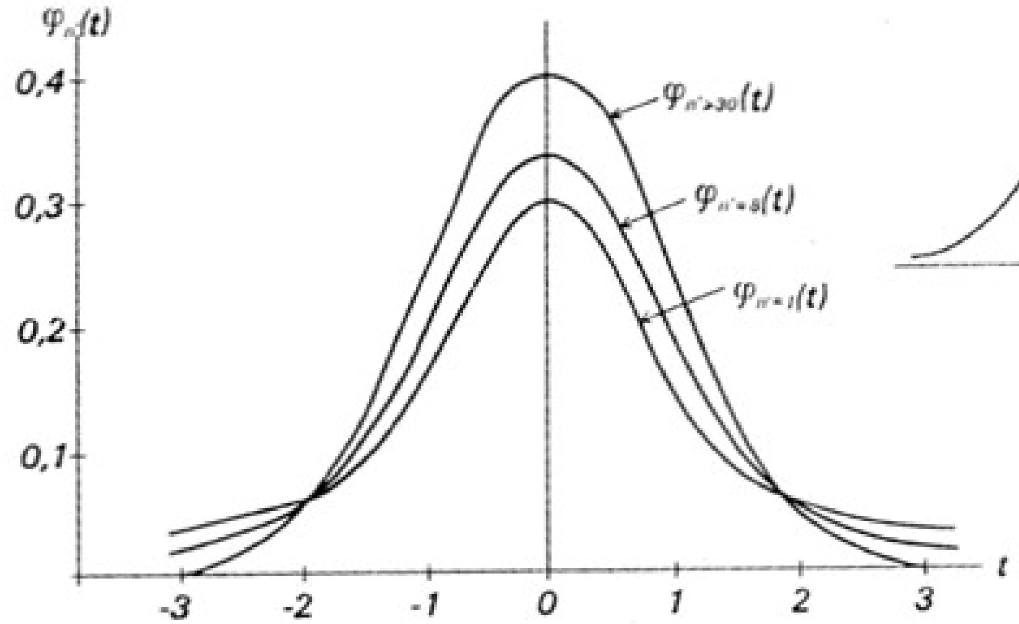
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n'} U_i^2 \quad \Longrightarrow \quad \chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n'} U_i^2}{\sigma^2} \quad \Longrightarrow \quad \chi^2 = \frac{n' \cdot s^2}{\sigma^2}$$

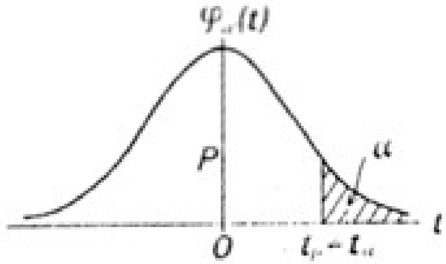
(Pro U s rozdělením $N(0;\sigma^2)$, platí, že $\frac{U}{\sigma}$ má $N(0;1)$).

1.4 Studentovo rozdělení.

Mějme dvě nezávislé veličiny U a χ^2. Veličina U nechť má rozdělení $N(0;1)$ a veličina χ^2 rozdělení $\chi^2(n')$. Potom hustota pravděpodobnosti veličiny t má Studentovo rozdělení

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{\chi^2}{n'}}} \qquad \varphi_{n'}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)\sqrt{\pi\, n'}}\left(1 + \frac{t^2}{n'}\right)^{-\frac{n'+1}{2}}, \text{ pro } t \in (-\infty, +\infty) \text{ a } n' = 1, 2, \ldots$$





1.5 Fisherovo rozdělení.

Mějme dvě nezávislé veličiny y_1 a y_2. Veličina y_1 má rozdělení $\chi^2(n_1{}')$ a veličina y_2 rozdělení $\chi^2(n_2{}')$. Potom veličina

$$F = \frac{\frac{y_1}{n'_1}}{\frac{y_2}{n'_2}}$$

má Snedecorovo (Fisherovo) *F*-rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

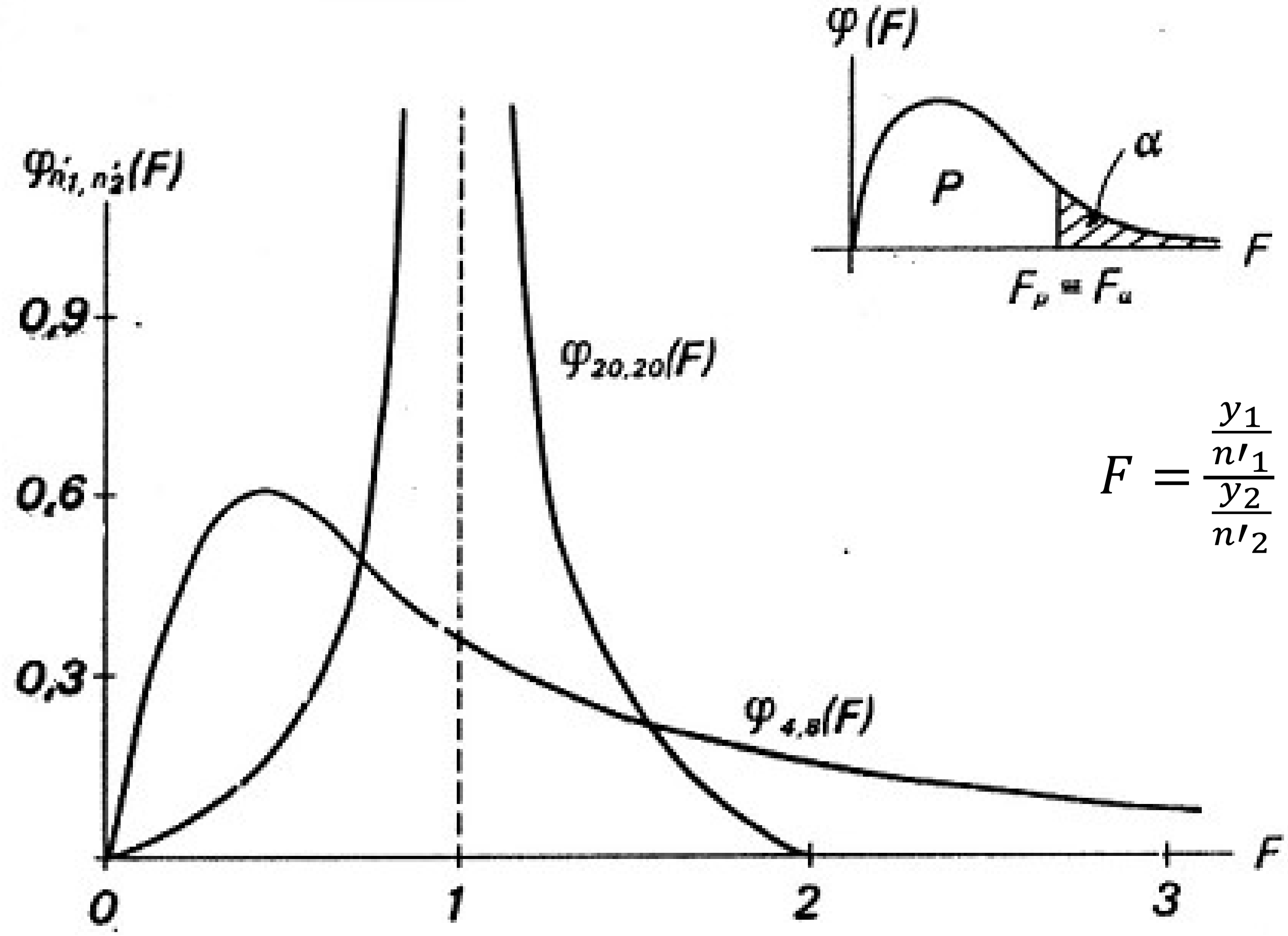
$$\varphi_{n'_1,n'_2}(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{n'_1+n'_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n'_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'_2}{2}\right)}\left(\frac{n'_1}{n'_2}\right)^{\frac{n'_1}{2}} F^{\frac{n'_1}{2}-1}\left(1+\frac{n'_1}{n'_2}\right)^{-\left(\frac{n'_1+n'_2}{2}\right)}.$$

Distribuční funkce bude

$$F_{n'_1,n'_2}(F) = \int_0^F \varphi_{n'_1,n'_2}(F)dF.$$

značí se $F(n_1{}', n_2{}')$. Přitom $n_1{}'$ ($n_2{}'$) je počet stupňů volnosti náhodné veličiny χ_1^2, (χ_2^2) v čitateli (jmenovateli) náhodné veličiny F.

1.5 Fisherovo rozdělení.



$$F = \frac{\frac{y_1}{n'_1}}{\frac{y_2}{n'_2}}$$

2. Bodové a intervalové odhady.

Bodový odhad

- neznámý parametr se charakterizujeme jedinou hodnotou, pokud možno blízkou skutečné hodnotě. Hodnota bodového odhadu nevypovídá nic o přesnosti odhadu. Např. měřená (vyrovnaná) hodnota je bodový odhad skutečné hodnoty.

Intervalový odhad

- neznámý parametr charakterizujeme intervalem, který s velkou pravděpodobností obsahuje skutečnou hodnotu. Délka intervalu vypovídá o přesnosti odhadu.

- Intervalový odhad je založen na vytvoření intervalu, ve kterém s jistou zvolenou pravděpodobností můžeme očekávat hodnotu neznámého parametru.

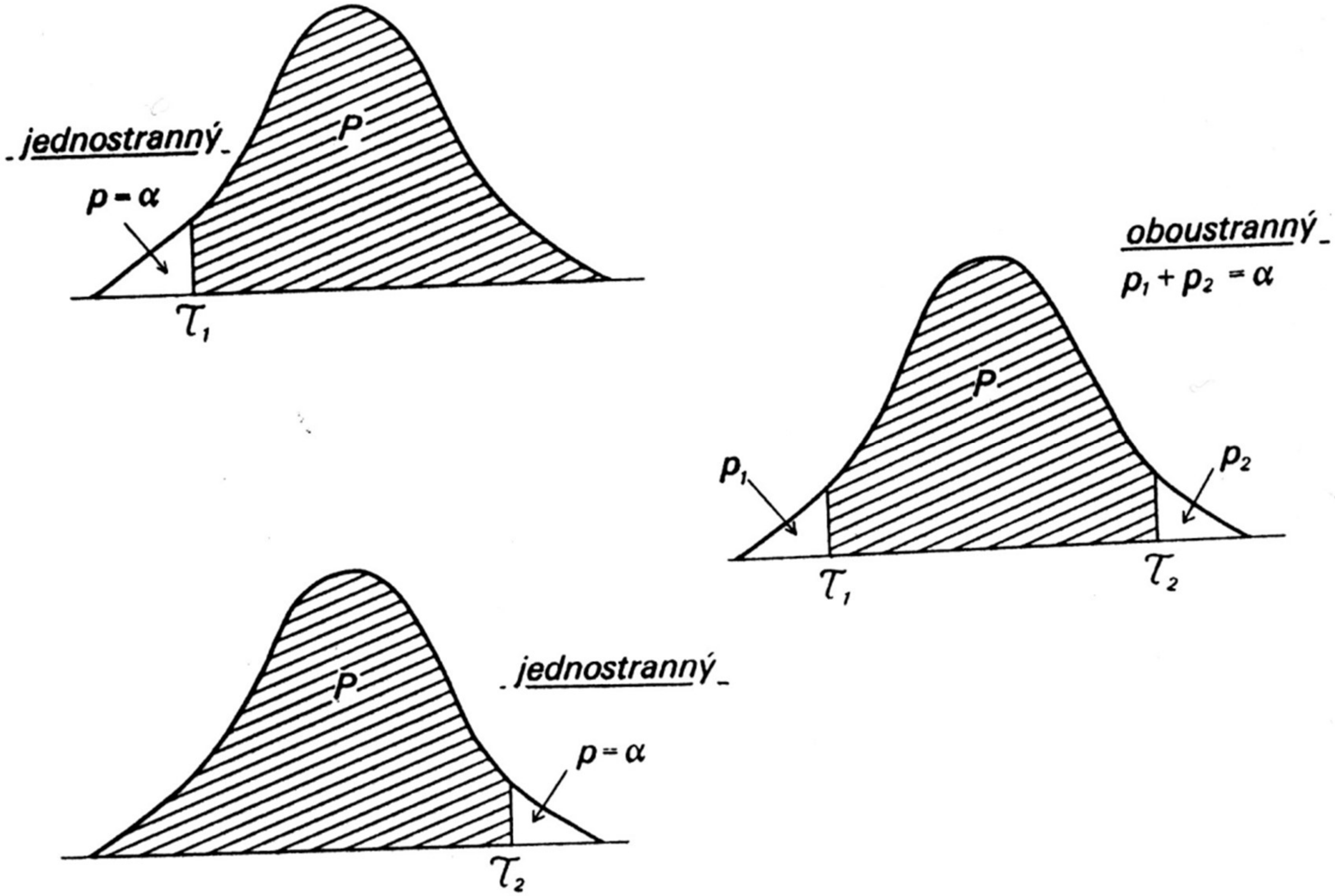
- Interval od τ_1 do τ_2 nazveme $100 \cdot (1 - \alpha)$ procentním intervalem spolehlivosti parametru Θ, pokud platí:

$$P(\tau_1 < \Theta < \tau_2) = 1 - \alpha.$$

2. Bodové a intervalové odhady.

Konstrukce intervalu spolehlivosti

-



2. Bodové a intervalové odhady.

Intervalový odhad – normální rozdělení

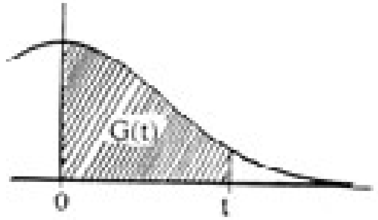
- Interval spolehlivosti se obvykle vyjadřuje ve tvaru

$$P(X - t \cdot \sigma < x < X + t \cdot \sigma) = 1 - \alpha$$

kde násobek t je v souvislosti s hladinou významnosti α podle vzorců normálního rozdělení a vztah je pro naše potřeby tabelován. Např. pro $t = 2{,}5$ je $\alpha = 0{,}01$ a znamená to, že s pravděpodobností 0,99 se naměřená hodnota pohybuje od pravé hodnoty až do vzdálenosti $2{,}5 \cdot \sigma$. Čili teoreticky jen 1% výsledků měření (či výpočtů) by mělo překročit tyto meze, což bereme jako velmi nepravděpodobné (i když možné) a tyto výsledky již neuvažujeme.

2. Bodové a intervalové odhady.

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$



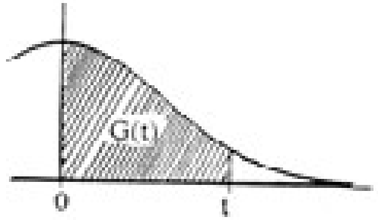
Intervalový odhad – normální rozdělení

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319

2. Bodové a intervalové odhady.

Intervalový odhad – normální rozdělení

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4990	0,4993	0,4995	0,4997	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,5000

2. Bodové a intervalové odhady.

Konstrukce intervalu spolehlivosti

- Interval spolehlivosti pro střední hodnotu E(x) = X základního souboru
    - a) je známa základní směrodatná odchylka
        - Viz předchozí případ – použije se normální rozdělení.

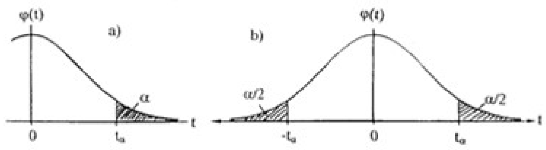
2. Bodové a intervalové odhady.

Konstrukce intervalu spolehlivosti

- Interval spolehlivosti pro střední hodnotu E(x) = X základního souboru
    - b) není známa základní směrodatná odchylka = je známa výběrová

- výběrová s má studentovo rozdělení, použije se toto, postup výpočtu je shodný.

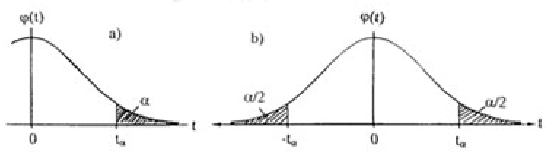
2. Bodové a intervalové odhady.



Studentovo rozdělení

Pro jednostranný test $\alpha =$	0,0500	0,0250	0,0100	0,0050	0,0005
Pro oboustranný test $\alpha =$	0,100	**0,050**	0,020	**0,010**	0,001
$n' = 1$	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
2	2,92	4,30	6,96	9,92	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14

2. Bodové a intervalové odhady.



Pro jednostranný test $\alpha =$	0,0500	0,0250	0,0100	0,0050	0,0005
Pro oboustranný test $\alpha =$	0,100	0,050	0,020	0,010	0,001
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
50	1,68	2,01	2,40	2,68	3,50
100	1,66	1,98	2,36	2,63	3,39
200	1,65	1,97	2,35	2,60	3,34
500	1,65	1,96	2,33	2,59	3,31
1000	1,65	1,96	2,33	2,58	3,30
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,29

2. Bodové a intervalové odhady.

Konstrukce intervalu spolehlivosti

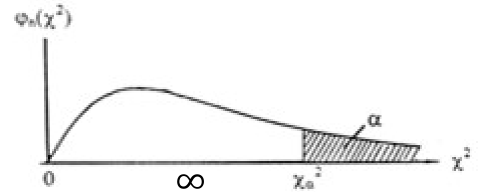
- Interval spolehlivosti pro varianci σ^2 základního souboru

- Protože platí:

$$\chi^2 = \frac{n' \cdot \ s^2}{\sigma^2} \Longrightarrow \tau = \sqrt{\frac{\chi^2}{n'}}$$

(Hodnota τ je také tabelována).

$$P(X - \tau \cdot \sigma < x < X + \tau \cdot \sigma) = 1 - \alpha$$



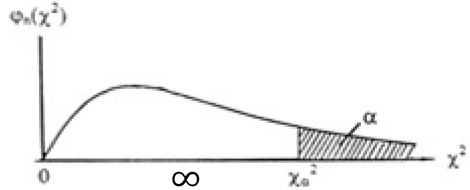
2. Bodové a intervalové odhady.

Konstrukce intervalu spolehlivosti

$$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \int_{\chi^2_\alpha}^{\infty} \varphi_{n'}(\chi^2)\, d\chi^2$$

- Interval spolehlivosti pro varianci σ^2 základního souboru

α	0,995	0,990	0,975	0,950	0,050	0,025	0,010	0,005
$n' = 1$	0,000	0,000	0,001	0,004	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,010	0,020	0,051	0,103	5,99	7,38	9,21	10,6
3	0,072	0,115	0,216	0,352	7,81	9,35	11,34	12,8
4	0,207	0,297	0,484	0,711	9,49	11,1	13,3	14,9
5	0,412	0,554	0,831	1,15	11,1	12,8	15,1	16,7
6	0,676	0,872	1,24	1,635	12,6	14,4	16,8	18,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	14,1	16,0	18,5	20,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	15,5	17,5	20,1	22,0
9	1,73	2,09	2,70	3,33	16,9	19,0	21,7	23,6
10	2,16	2,56	3,25	3,94	18,3	20,5	23,2	25,2
11	2,60	3,05	3,82	4,57	19,7	21,9	24,7	26,8
12	3,07	3,57	4,40	5,23	21,0	23,3	26,2	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	22,4	24,7	27,7	29,8
14	4,07	4,66	5,63	6,57	23,7	26,1	29,1	31,3



2. Bodové a intervalové odhady.

Konstrukce intervalu spolehlivosti

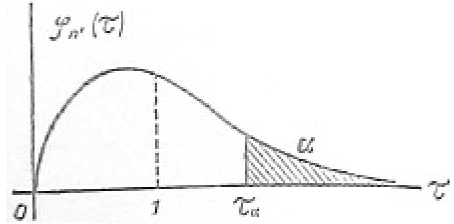
$$\alpha = P\left(\chi^2 > \chi_\alpha^2\right) = \int_{\chi_\alpha^2}^{\infty} \varphi_{n'}\left(\chi^2\right) d\chi^2$$

- Interval spolehlivosti pro varianci σ^2 základního souboru

α	0,995	0,990	0,975	0,950	0,050	0,025	0,010	0,005
15	4,60	5,23	6,26	7,26	25,0	27,5	30,6	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	26,3	28,8	32,0	34,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	27,6	30,2	33,4	35,7
18	6,26	7,01	8,23	9,39	28,9	31,5	34,8	37,2
19	6,84	7,63	8,91	10,1	30,1	32,9	36,2	38,6
20	7,43	8,26	9,59	10,9	31,4	34,2	37,6	40,0
22	8,64	9,54	11,0	12,3	33,9	36,8	40,3	42,8
24	9,89	10,9	12,4	13,8	36,4	39,4	43,0	45,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	38,9	41,9	45,6	48,3
28	12,5	13,6	15,3	16,9	41,3	44,5	48,3	51,0
30	13,8	15,0	16,8	18,5	43,8	47,0	50,9	53,7
50	28,0	29,7	32,4	34,8	67,5	71,4	76,2	79,5
100	67,3	70,1	74,2	77,9	124	130	136	140
200	152	156	163	168	234	241	249	255
500	422	429	440	449	553	564	576	585

2. Bodové a intervalové odhady.

$$\tau = \frac{m}{\sigma}$$



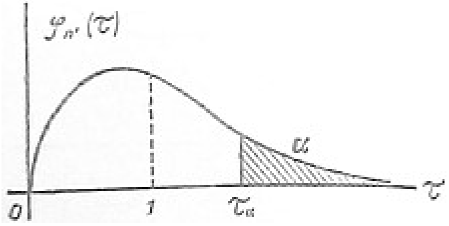
Konstrukce intervalu spolehlivosti

- Interval spolehlivosti pro varianci σ^2 základního souboru

n’	0,99	0,95	0,90	0,10	0,05	0,01	0,01	0,001
1	0,01	0,06	0,13	1,64	1,96	2,58	2,81	3,29
2	0,10	0,23	0,32	1,52	1,73	2,15	2,41	2,63
3	0,20	0,34	0,44	1,44	1,61	1,94	2,07	2,33
4	0,27	0,42	0,52	1,39	1,54	1,82	1,93	2,15
5	0,33	0,48	0,57	1,36	1,49	1,74	1,81	2,03
6	0,38	0,52	0,61	1,33	1,45	1,67	1,76	1,93
7	0,42	0,56	0,64	1,31	1,42	1,62	1,70	1,86
8	0,45	0,58	0,66	1,29	1,39	1,58	1,66	1,81
9	0,48	0,61	0,68	1,28	1,37	1,55	1,62	1,76
10	0,51	0,63	0,70	1,26	1,35	1,52	1,59	1,72
12	0,55	0,66	0,72	1,24	1,32	1,48	1,54	1,66
14	0,58	0,69	0,75	1,23	1,30	1,44	1,49	1,61
16	0,60	0,71	0,76	1,21	1,28	1,41	1,46	1,57
18	0,62	0,72	0,78	1,20	1,27	1,39	1,44	1,53

2. Bodové a intervalové odhady.

$$\tau = \frac{m}{\sigma}$$



Konstrukce intervalu spolehlivosti

- Interval spolehlivosti pro varianci σ^2 základního souboru

n'	0,99	0,95	0,90	0,10	0,05	0,01	0,01	0,001
20	0,64	0,74	0,79	1,19	1,25	1,37	1,41	1,51
25	0,68	0,76	0,81	1,17	1,23	1,33	1,37	1,45
30	0,71	0,79	0,83	1,60	1,21	1,30	1,34	1,41
35	0,73	0,81	0,84	1,15	1,19	1,28	1,31	1,38
40	0,74	0,82	0,85	1,14	1,18	1,26	1,29	1,35
50	0,77	0,84	0,87	1,12	1,16	1,23	1,26	1,32
60	0,79	0,85	0,88	1,11	1,15	1,21	1,24	1,29
80	0,82	0,87	0,90	1,10	1,13	1,19	1,21	1,25
100	0,84	0,88	0,91	1,09	1,12	1,17	1,18	1,22
150	0,87	0,91	0,92	1,07	1,09	1,14	1,15	1,18
200	0,88	0,92	0,93	1,06	1,08	1,12	1,13	1,16
300	0,91	0,93	0,95	1,05	1,07	1,10	1,11	1,13
500	0,93	0,96	0,96	1,04	1,05	1,07	1,08	1,10
1000	0,95	0,97	0,97	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07
10000	0,98	0,99	0,99	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02
∞	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Základy statistického testování.

Obecný postup testování statistických hypotéz lze popsat takto:

a) Formulace nulové hypotézy H_0 a alternativní hypotézy H_1,
b) volba hladiny významnosti α,
c) volba testovacího kritéria,
d) určení rozdělení pravděpodobnosti testovacího kritéria a výpočet kritických hodnot (oboustranných nebo jednostranných) pro hladinu významnosti α,
e) porovnat vypočtenou a kritickou hodnotu testovacího kritéria a vyslovit závěr o testované hypotéze H_0.

Nulová hypotéza H_0 je předpoklad o existenci základního souboru s jistým parametrem Θ. Závažná je v této souvislosti formulace tzv. alternativní hypotézy H_1, tj. hypotézy, kterou přijmeme, když neplatí nulová hypotéza. Je rozhodující pro určení jednostranné nebo oboustranné kritické hodnoty testovacího kritéria. Formulace hypotéz o neznámém parametru Θ může být:

1) $H_0: \Theta = \Theta_0$, $H_1: \Theta \neq \Theta_0$, pak přichází v úvahu oboustranný test,
2) $H_0: \Theta = \Theta_0$, $H_1: \Theta > \Theta_0$, nebo $H_0: \Theta = \Theta_0$, $H_1: \Theta < \Theta_0$, pak v obou případech použijeme jednostranný test.

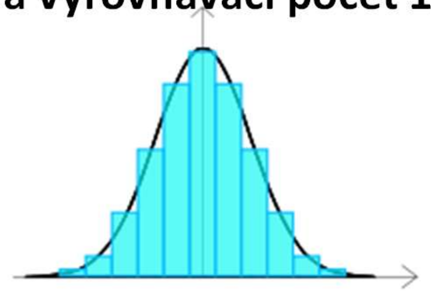
3. Základy statistického testování.

Hladina významnosti α je pravděpodobnost, že hodnota testovacího kritéria překročí určenou kritickou hodnotu. Prakticky se nejčastěji volí $\alpha = 0{,}05$ nebo $\alpha = 0{,}01$. Hodnoty testovacího kritéria, které se vyskytnou s pravděpodobností menší než α se nazývají statisticky významné.

Při testování nulové hypotézy se můžeme dopustit dvou druhů chyb:

a) chyby prvního druhu, tj. chyby, že zamítáme nulovou hypotézu, ačkoliv je ve skutečnosti správná - její pravděpodobnost je právě hladina významnosti α,
b) chyby druhého druhu, tj. chyby, že nezamítáme nulovou hypotézu, ačkoliv je nesprávná - její pravděpodobnost označíme β.

O vzájemném vztahu obou druhů chyb platí, že za nezměněných podmínek snižování pravděpodobnosti chyby jednoho druhu vede ke zvyšování pravděpodobnosti chyby druhého druhu.



4. Testování shody rozdělení.

Pearsonův χ^2 - test pro jeden výběr

- Prvky hodnoceného náhodného výběru roztřídíme do intervalů (tříd). Počet prvků, které padnou do jistého intervalu, nazýváme skutečnou třídní četností r_j.
- Ze zvoleného rozdělení, které předpokládáme, že platí pro základní soubor, můžeme vypočítat očekávané třídní četnosti v těchto intervalech $R_j = n \cdot p_j$, kde n je celkový počet prvků náhodného výběru a p_j pravděpodobnost, že se prvek objeví v j-tém intervalu. (k je počet intervalů).

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(r_j - R_j\right)^2}{R_j}$$

Nulovou hypotézou je předpoklad, že se skutečné a očekávané třídní četnosti liší pouze náhodně, tj. že hodnocený výběr je výběrem ze základního souboru se zvoleným rozdělením pravděpodobnosti.

4. Testování shody rozdělení.

Pearsonův χ^2 - test pro jeden výběr

K použití testu je potřeba mimo dostatečně velkého počtu prvků s možností rozdělení alespoň do 10 tříd splnit ještě dva požadavky:

- všechna R_j musí být větší nebo rovna 1,
- nejvýše 20% hodnot R_j může být menší než 5, lépe všechny.

Pokud tyto požadavky nejsou splněny, musí se intervaly s nevyhovujícím R_j spojovat (jedná se o krajní intervaly). V takovém případě se změní počet intervalů k. Z tabulek χ^2- rozdělení najdeme pro hladinu významnosti α a $n' = k - c - 1$ stupňů volnosti kritickou hodnotu χ_α^2. Nulovou hypotézu o platnosti zvoleného rozdělení v základním souboru zamítneme, když $\chi^2 > \chi_\alpha^2$. (k je počet intervalů, c je počet určovaných neznámých.

4. Testování shody rozdělení.

Příklad:

V trigonometrické síti byly zaměřeny všechny úhly, vypočteny trojúhelníkové uzávěry U_i, $i = 1, 2, \ldots, 204$ a tyto uzávěry rozděleny do intervalů po 0,3“. Zjištěné hodnoty skutečných četností postupně od leva pro intervaly v rozmezí -1,2“ až +1,8“ (po 0,3“, tj. 10 intervalů): 6, 22, 36, 58, 38, 19, 13, 5, 4, 3. Dále je dán vypočítaný výběrovou s $s_U = \sqrt{[UU]/n} = 0{,}545$. Vyšetřete, zda tento náhodný výběr uzávěrů patří do základního souboru s normálním rozdělením $N(0, \sigma^2)$; volte $\alpha = 0{,}05$.

Určíme hranice intervalů, přepočtené na normovanou proměnnou $t = U/s_U$, v tabulkách normálního rozdělení najdeme pro tento argument hodnoty funkce $G(t)$ a z nich pravděpodobnosti $p_{i,i+1} = G(t_{i+1}) - G(t_i)$ pro $i = 1, \ldots, 11$; vypočítáme očekávané třídní četnosti $R = n \cdot p$ (spojíme dolní a horní dva intervaly, abychom dosáhli toho, že každé $R > 1$), a z nich vypočítáme hodnotu testovacího kritéria:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{9} \frac{\left(r_j - R_j\right)^{\mathbf{2}}}{R_j} = 22{,}8\ .$$

Z tabulek χ^2-rozdělení najdeme pro hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ a počet stupňů volnosti $n' = k - c - 1$, kde k je počet intervalů po sloučení, tj. $k = 9$ a c je počet určovaných parametrů, v našem případě jsme určovali výběrový střední uzávěr, tj. $c = 1$ a $n' = 9 - 1 - 1 = 7$, kritickou hodnotu $\chi^2_{0,05} = 14{,}1$. Poněvadž $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, zamítáme hypotézu o platnosti normálního rozdělení v základním souboru.

☺ Konec ☺