Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

Téma č. 3: **Zákon hromadění skutečných chyb, směrodatných odchylek.**

1. **Zákon hromadění skutečných chyb.**
   Příklady.
2. **Zákon hromadění směrodatných odchylek.**
   Příklady.

1. Zákon hromadění skutečných chyb.

- Číselné hodnoty udávající výsledky měření jsou poněkud jiného druhu než "čistá" čísla v matematickém smyslu. Ke každé nalezené hodnotě l měřené veličiny L patří skutečná chyba ε anebo obor nejistoty (nepřesnosti), s jakou byl výsledek určen. Nepracujeme proto s přesnými čísly, ale s hodnotami přibližnými.
- Měřená hodnota a její chyba se musí při zpracování dat uplatňovat vždy společně: nejistota naměřeného výsledku se totiž přenáší na součet, násobek nebo jinou libovolnou funkci měřených veličin.
- V této části budeme uvažovat měření nebo chyby vzájemně nezávislé (nekorelované).

- Úloha: odhadnout skutečnou chybu funkce naměřených nezávislých veličin $\boldsymbol{l}$, jejichž skutečné chyby $\boldsymbol{\varepsilon}$ známe: (tento předpoklad není běžně splněn!)

$f = f(\boldsymbol{l}^T)$ (obecněji $g(f) = f(\boldsymbol{l}^T)$).

- Pro další odvození požadujeme splnění těchto předpokladů:
  - funkce f, g mají spojité parciální derivace podle jednotlivých proměnných alespoň druhého řádu;
  - skutečné chyby všech proměnných jsou relativně malé.

1. Zákon hromadění skutečných chyb.

Označíme-li správné hodnoty funkce $F = f + \varepsilon_f$ a měření $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{\varepsilon}$, můžeme napsat

$$F = f + \varepsilon_f = f(\boldsymbol{l}^T + \boldsymbol{\varepsilon}^T)$$

A tedy:

$$\varepsilon_f = f(\boldsymbol{l}^T + \boldsymbol{\varepsilon}^T) - f$$

Provedeme rozvoj funkce f v Taylorovu řadu a omezíme se na členy 1. řádu (při označení vektoru parciálních derivací):

$$\varepsilon_f = f(\boldsymbol{l}^T) + \left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \boldsymbol{L}}\right|_{L=l} \cdot \varepsilon - f \qquad \left.\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \boldsymbol{L}}\right|_{L=l} = \left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial l_1}, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial l_2}, \ldots, \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial l_n}\right) = \boldsymbol{f}_l^T$$

Zákon hromadění skutečných chyb:

$$\varepsilon_f = \boldsymbol{f}_{\mathrm{l}}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

1. Zákon hromadění skutečných chyb.

Podobně pro obecnější model bude platit vztah

$$g\left(f + \varepsilon_f\right) = f(\boldsymbol{l}^T + \boldsymbol{\varepsilon}^T)$$

A tedy:

$$g(f) + \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{F=f} \cdot \varepsilon_f = f(\boldsymbol{l}^T) + f_l^T \cdot \varepsilon \qquad g_f = \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_{F=f}$$

Zákon hromadění skutečných chyb:

$$\varepsilon_f = \frac{1}{g_f}\boldsymbol{f}_{\mathrm{l}}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

1. Zákon hromadění skutečných chyb.

Příklady:

Vypočítejte skutečnou chybu výšky bodu H_P určeného prostorovou polární metodou, jestliže byla měřena nebo známa výška stanoviska H_S =234,523 m, výška přístroje v_P = 1,421 m, převýšení mezi horizontem přístroje a cílem h = 3,564 m a výška cíle v_C = 2,500 m.

Skutečné chyby hodnot a měření: ε_{HS} = 0,0005 m, ε_{vP} = 0,001 m, ε_h = 0,003 m, ε_{vC} = 0,001 m.

1. Zákon hromadění skutečných chyb.

Příklady:

Pro aplikaci zákona hromadění skutečných chyb je třeba znát funkční vztah, zde pro určení výšky bodu polární metodou:

$$H_P = H_S + v_P + h - v_C.$$

Tvar zákona hromadění skutečných chyb:

$$\varepsilon_{HP} = \frac{\partial H_P}{\partial H_S} \cdot \varepsilon_{HS} + \frac{\partial H_P}{\partial v_P} \cdot \varepsilon_{vP} + \frac{\partial H_P}{\partial h} \cdot \varepsilon_h + \frac{\partial H_P}{\partial v_C} \cdot \varepsilon_{vC} \ .$$

Tvar zákona hromadění skutečných chyb použité funkce po derivaci:

$$\varepsilon_{HP} = 1 \cdot \varepsilon_{HS} + 1 \cdot \varepsilon_{vP} + 1 \cdot \varepsilon_h - 1 \cdot \varepsilon_{vC} = \varepsilon_{HS} + \varepsilon_{vP} + \varepsilon_h - \varepsilon_{vC} \ .$$

$$\varepsilon_{HP} = (0{,}0005 + 0{,}001 + 0{,}003 - 0{,}001)\ m = 0{,}0035\ m \ .$$

1. Zákon hromadění skutečných chyb.

Příklady:

Vypočítejte skutečnou chybu ε_P plochy trojúhelníka P, jestliže jsou měřeny dvě délky a = 76,423 m a b = 45,311 m a úhel ω = 67,5472 gon jimi sevřený. Skutečné chyby měření jsou ε_a = 0,007 m, ε_b = 0,011 m, ε_ω = 0,0020 gon.

1. Zákon hromadění skutečných chyb.

Příklady:

Funkční vztah:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega).$$

Zákon hromadění skutečných chyb:

$$\varepsilon_P = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{a}} \cdot \varepsilon_a + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{b}} \cdot \varepsilon_b + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \omega} \cdot \frac{\varepsilon_\omega}{\rho}\ .$$

Po derivaci:

$$\varepsilon_P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin(\omega) \cdot \varepsilon_\mathrm{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sin(\omega) \cdot \varepsilon_\mathrm{b} + \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \cdot \cos(\omega)) \cdot \frac{\varepsilon_\omega}{\rho} \qquad ,$$

po vyčíslení:

$$\varepsilon_P = 0{,}1384252 + 0{,}3668854 + 0{,}0265427 = 0{,}53\ \mathrm{m}^2.$$

1. Zákon hromadění skutečných chyb.

Příklady:

1. Vypočítejte vodorovnou vzdálenost d a její skutečnou chybu ε_{d}, je - li měřena třemi klady pásma d_1 = 29,912 m; d_2 = 29,987 m; d_3 = 12,492 m a skutečné chyby jednotlivých kladů jsou ε_1 = 3 mm; ε_2 = 4 mm; ε_3 = 2 mm. [d = 72,391 m; ε_d = 9 mm]

2. Vypočítejte převýšení h a jeho skutečnou chybu mezi stanoviskem a určovaným bodem, je – li známa měřená šikmá vzdálenost sd = 36,729 m, měřený zenitový úhel z = 98,4572 gon, výška přístroje v_P = 1,371 m a výška cíle v_C = 1,400 m; a skutečné chyby jednotlivých veličin jsou: ε_{sd} = 0,003 m; ε_z = 0,0015 gon; ε_{vc} = 0,001 m; ε_{vp} = 0,002 m.
[h = 0, 861 m; ε_h = 0,0002 m]

3. Určete skutečnou chybu ε, která maximálně vznikne při zaokrouhlení na centimetry pro součet dvou hodnot. (Nápověda: Maximální skutečná chyba může být v tomto případě 0,005 m). [ε = 0,01 m]

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

- Číselné hodnoty udávající výsledky měření jsou poněkud jiného druhu než "čistá" čísla v matematickém smyslu. Ke každé nalezené hodnotě l měřené veličiny L patří skutečná chyba ε anebo obor nejistoty (nepřesnosti), s jakou byl výsledek určen. Nepracujeme proto s přesnými čísly, ale s hodnotami přibližnými.
- Obvykle nemáme k dispozici skutečnou chybu měření (to bychom měření opravili a pracovali dále s hodnotou přesnou), ale statistický odhad rozptylu ve formě směrodatné odchylky základní σ nebo výběrové s. Potřebujeme tedy takový zákon, který umožní pracovat s těmito charakteristikami přesnosti.
- Z dříve uvedené definice platí:

$$\sigma_i^2 = E\left(\varepsilon_i^2\right)$$

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

- Z dříve uvedené definice platí:

$$\sigma_i^2 = E\left(\varepsilon_i^2\right)$$

- Odvození:

$$\varepsilon_f = \boldsymbol{f}_{\mathrm{l}}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\varepsilon_f^2 = \left(\boldsymbol{f}_{\mathrm{l}}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\right) \cdot \left(\boldsymbol{f}_{\mathrm{l}}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\right)^T = \boldsymbol{f}_{\mathrm{l}}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{f}_l$$

$$E\left(\varepsilon_f^2\right) = \boldsymbol{f}_l^T \cdot E(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T) \cdot \boldsymbol{f}_l$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T) = E \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_1\varepsilon_n \\ \varepsilon_2\varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2\varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_n\varepsilon_1 & \varepsilon_n\varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix}$$

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Vztah byl odvozen při splnění těchto předpokladů:

1. funkce f, g mají spojité parciální derivace podle jednotlivých proměnných;
2. skutečné chyby všech proměnných jsou relativně malé;
3. proměnné ve funkčním vztahu f jsou nezávislé (tedy i skutečné chyby těchto proměnných jsou nezávislé);
4. skutečné chyby všech proměnných mají sudé rozdělení se střední hodnotou $E(\varepsilon) = 0$.

Při splnění těchto předpokladů totiž platí:

$$E\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = E(\varepsilon_i) \cdot E(\varepsilon_i) = 0.$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T) = E \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_1 \varepsilon_n \\ \varepsilon_2 \varepsilon_1 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2 \varepsilon_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_n \varepsilon_1 & \varepsilon_n \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1^2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E(\varepsilon_2^2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E(\varepsilon_n^2) \end{pmatrix}$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}^2$$

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Při splnění těchto předpokladů totiž platí:

$$E\left(\varepsilon_f^2\right) = \boldsymbol{f}_l^T \cdot E(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T) \cdot \boldsymbol{f}_l$$

Zákon hromadění skutečných chyb:

$$\sigma_f^2 = \boldsymbol{f}_l^T \cdot \boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{f}_l$$

Pro obecnější tvar funkce platí obdobně vztah

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{g_f^2} \cdot \boldsymbol{f}_l^T \cdot \boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{f}_l$$

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{g_f^2} \cdot (f_1^2 \cdot \sigma_1^2 + f_2^2 \cdot \sigma_2^2 + \cdots + f_n^2 \cdot \sigma_n^2)$$

Důležitá je okolnost, že se ve vzorci jednotlivé členy sčítají kvadraticky, tj. střední chyba funkce narůstá podle Pythagorovy věty. Na rozdíl od zákona hromadění skutečných chyb nesmíme střední chyby sčítat lineárně.

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Příklady:

Vypočítejte směrodatnou odchylku výšky bodu H_P určeného prostorovou polární metodou, jestliže byla měřena nebo známa výška stanoviska H_S = 234,523 m, výška přístroje v_P = 1,421 m, převýšení mezi horizontem přístroje a cílem h = 3,564 m a výška cíle v_C = 2,500 m. Směrodatné odchylky hodnot a měření: σ_{HS} = 0,0005 m, σ_{vP} = 0,001 m, σ_h = 0,003 m, σ_{vC} = 0,001 m.

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Příklady:

Pro aplikaci zákona hromadění směrodatných odchylek je třeba znát funkční vztah, zde pro určení výšky bodu polární metodou:

$$H_P = H_S + v_P + h - v_C.$$

Tvar zákona hromadění směrodatných odchylek:

$$\sigma_{HP}^2 = \left(\frac{\partial H_P}{\partial H_S}\right)^2 \cdot \sigma_{HS}^2 + \left(\frac{\partial H_P}{\partial v_P}\right)^2 \cdot \sigma_{vP}^2 + \left(\frac{\partial H_P}{\partial h}\right)^2 \cdot \sigma_h^2 + \left(\frac{\partial H_P}{\partial v_C}\right)^2 \cdot \sigma_{vC}^2 \ .$$

Tvar zákona hromadění skutečných chyb použité funkce po derivaci:

$$\sigma_{HP}^2 = 1^2 \cdot \sigma_{HS}^2 + 1^2 \cdot \sigma_{vP}^2 + 1^2 \cdot \sigma_h^2 + (-1)^2 \cdot \sigma_{vC}^2 = \sigma_{HS}^2 + \sigma_{vP}^2 + \sigma_h^2 + \sigma_{vC}^2 \ .$$

$$\sigma_{HP} = \sqrt{(0{,}0005^2 + 0{,}001^2 + 0{,}003^2 + 0{,}001^2)} = 0{,}0034\ m.$$

Směrodatná odchylka určené výšky bodu P má hodnotu 3,4 mm.

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Příklady:

Vypočítejte směrodatnou odchylku σ_P plochy trojúhelníka P, jestliže jsou měřeny dvě délky a = 76,423 m a b = 45,311 m a úhel ω = 67,5472 gon jimi sevřený. Směrodatné odchylky měření jsou σ_a = 0,007 m, σ_b = 0,011 m, σ_ω = 0,0020 gon.

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Příklady:

Funkční vztah:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\omega).$$

Zákon hromadění směrodatných odchylek:

$$\sigma^2{}_P = \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{a}}\right)^2 \cdot \sigma^2{}_a + \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{b}}\right)^2 \cdot \sigma^2{}_b + \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \omega}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2{}_\omega}{\rho^2}\,.$$

Po derivaci:

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin(\omega)\right)^2 \cdot \sigma_{\mathrm{a}}^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \sin(\omega)\right)^2 \cdot \sigma_{\mathrm{b}}^2 + \left(\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} \cdot \cos(\omega) \cdot \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sigma_\omega^2}{\rho^2}),$$

po vyčíslení:

$$\sigma_P^2 = \sqrt{0{,}0191615 + 0{,}1346049 + 0{,}0007045} = 0{,}39\ \ \mathrm{m}^2.$$

Směrodatná odchylka plochy trojúhelníka je 0,39 m^2.

2. Zákon hromadění směrodatných odchylek.

Příklady:

1. Vypočítejte vodorovnou vzdálenost d a její směrodatnou odchylku σ_d, je - li měřena třemi klady pásma d_1 = 29,912 m; d_2 = 29,987 m; d_3 = 12,592 m a směrodatné odchylky jednotlivých kladů jsou σ_1 = 3 mm; σ_2 = 4 mm; σ_3 = 2 mm.

[d = 72,491 m; σ_d = 5,4 mm]

2. Vypočítejte převýšení h a jeho směrodatnou odchylku mezi stanoviskem a určovaným bodem, je – li známa měřená šikmá vzdálenost sd = 36,729 m, měřený zenitový úhel z = 98,4572 gon, výška přístroje v_P = 1,371 m a výška cíle v_C = 1,400 m; a směrodatné odchylky jednotlivých veličin jsou: σ_{sd} = 0,003 m; σ_z = 0,0015 gon; σ_{vc} = 0,001 m; σ_{vp} = 0,002 m. [h = 0,861 m; s_h = 2,4 mm]

3. Odvoďte vztah pro výpočet aritmetického průměru z n opakovaných měření.

☺ Konec ☺