Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

Téma č. 5: **Metoda nejmenších čtverců.**
Vyrovnání měření zprostředkujících.

1. **Formulace úlohy.**
2. **Odvození postupu výpočtu.**
3. **Směrodatné odchylky.**
4. **Kontroly.**
5. **Příklady.**
   1. **Výšková síť.**
   2. **Vážený průměr.**

Metoda nejmenších čtverců. Vyrovnání měření zprostředkujících.

1. Formulace úlohy.

Způsobu vyrovnání zprostředkujících měření používáme v případech, kdy hledané neznámé veličiny se neměří přímo, ale určují se prostřednictvím jiných měřených veličin, které jsou s neznámými ve známém funkčním vztahu. Konaná měření se zde nazývají nepřímá neboli zprostředkující.

K vyrovnání dojde, jestliže konáme nadbytečná měření, takže můžeme sestavit více rovnic, než je neznámých. Zprostředkující měření jsou zatížena nevyhnutelnými chybami, které se přenášejí i na odhady neznámých. Vyrovnáním budeme hledat nejspolehlivější hodnoty neznámých a jejich směrodatné odchylky, eventuálně vyrovnaná zprostředkující měření a jejich směrodatné odchylky.

1. Formulace úlohy.

Situace:
Provede se řada měření (třeba i opakovaných) s různě přesnými výsledky l_1, ...,l_n. Každé měření (případně skupinu opakovaných měření) pokládáme za náhodný výběr ze základního souboru možných hodnot. Dosažené výsledky představují neúplný soubor informací o neznámých skutečných hodnotách L.

Naměřené hodnoty jsou zatíženy různými skutečnými chybami, takže platí vztah:

$$\boldsymbol{l} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}.$$

Z měření však ε_i a tudíž ani L_i nelze určit. Hledáme proto aproximaci L_i. Tu nazveme vyrovnanou hodnotou, označíme $\bar{l}_i$ a požadujeme, aby pro hodnoty $\bar{l}_i - l_i = v_i$ platila podmínka MNČ.

Je více měření nežli neznámých, bez dodatečné podmínky neexistuje jednoznačné řešení.

1. Formulace úlohy.

Označení:

Měření: $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$

Neznámé: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Funkční vztah: $l_i = f_{li}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Opravy: $v_i = \bar{l}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - l_i$

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}\left(\boldsymbol{x}^T\right) - \boldsymbol{l}$$

Podmínka řešení:

$$\Omega = [\hat{v}\hat{v}] = [pvv] = \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} = min.$$

Měření mohou být různě přesná, jejich různé uplatnění ve vyrovnání (různá důvěryhodnost, interval spolehlivosti) je řešen vahami:

$$p_i = \frac{K}{\bar{m}_i^2} = \frac{\bar{m}_0^2}{\bar{m}_i^2}$$

2. Odvození postupu výpočtu.

Vyrovnaná hodnota: $\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T)$

Rovnice oprav: $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T) - \boldsymbol{l}$

V lineárním tvaru: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}$

Pokud funkce není lineární, je nutná linearizace Taylorovým rozvojem:

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}_0^T) + \left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T)}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \cdot \boldsymbol{dx} - \boldsymbol{l}$$

$$\bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}_0^T) - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}'$$

$$\left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T)}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}_1(\boldsymbol{x}^T)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}_1(\boldsymbol{x}^T)}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}_n(\boldsymbol{x}^T)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}_n(\boldsymbol{x}^T)}{\partial x_k} \end{pmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}',$$

2. Odvození postupu výpočtu.

Podmínku MNČ $\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} = min.$ splníme:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{dx}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{dx}^T}\right) \cdot 2 \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T \cdot 2 \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}') = \boldsymbol{0}$$

Normální rovnice:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}$$

Řešení normálních rovnic:

$$\boldsymbol{dx} = -\boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}'$$

Vyrovnaná měření :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{dx}$$

(Vzhledem k linearizaci nutno uvážit, že výpočet musí být iterační.)

2. Odvození postupu výpočtu.

Řešení normálních rovnic:

$$\boldsymbol{dx} = -\boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' = \left(\boldsymbol{A}^{T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}'$$

Vyrovnaná měření :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{dx}$$

Opravy:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}'$$

Vyrovnaná měření:

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v}$$

3. Směrodatné odchylky.

Směrodatná odchylka jednotková

$$s_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}}{n-k}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}}$$

Směrodatné odchylky vyrovnaných neznámých (kovarianční matice):

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}} = \sigma_0^2 \cdot \boldsymbol{N}^{-1}$$

Odvození:

$$\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{x} = \boldsymbol{N}^{-\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}'$$

- zde uvažujeme za zdroj chyb pouze $\boldsymbol{l}'$, a tedy po aplikaci zákona hromadění směrodatných odchylek

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{A}$ (vztah kovarianční matice a matice vah)

$$\boldsymbol{Q}_x = \boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{N}^{-\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{P}\right)^T = \boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{N}^{-1}$$

$\boldsymbol{Q}_x = \boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N}^{-1} = \boldsymbol{N}^{-1}$ (Vztah matice $\boldsymbol{Q}$ a matice $\boldsymbol{M}$)

3. Směrodatné odchylky.

Směrodatná odchylka vyrovnaného měření

Vyrovnaná měření jsou speciální funkce vyrovnaných neznámých

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}' = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \bar{\boldsymbol{l}}\left(\boldsymbol{x}_0^T\right) - \boldsymbol{l} = \bar{\boldsymbol{l}}\left(\boldsymbol{x}_0^T\right) + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\bar{l}} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T$$

$$\boldsymbol{M}_{\bar{\boldsymbol{l}}} = \sigma_0^2 \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T$$

5. Kontroly.

Dvojí výpočet oprav

$$\boldsymbol{v}^{I} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}'$$
$$\boldsymbol{v}^{II} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^{T}) - \boldsymbol{l}$$

- Kontrola dostatečné blízkosti přibližných hodnot vyrovnaným <-> iterace.

Jsou i další kontroly, které při počítačovém zpracování postrádají smysl, kontrolovaly by pouze sestavení programu.

6. Příklady.

Příklad č. 1: Výšková síť měřená nivelací.

6. Příklady.

Příklad č. 2: Vážený průměr

☺ Konec ☺