Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

Téma č. 6: **Vyrovnání měření zprostředkujících - opakování.**

1. **Formulace úlohy.**
2. **Postup výpočtu.**
3. **Směrodatné odchylky.**
4. **Příklady.**
    1. **Volné stanovisko.**
    2. **Vázaná síť.**
5. **Metody řečení normálních rovnic.**

1. Formulace úlohy.

Označení:

Měření: $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$
Neznámé: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
Funkční vztah: $l_i = f_{li}(x_1, x_2, \dots, x_n)$
Opravy: $v_i = \bar{l}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - l_i$

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T) - \boldsymbol{l}$$

Podmínka řešení:

$$\Omega = [\hat{v}\hat{v}] = [pvv] = \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} = min.$$

Měření mohou být různě přesná, jejich různé uplatnění ve vyrovnání (různá důvěryhodnost, interval spolehlivosti) je řešen vahami:

$$p_i = \frac{K}{\bar{m}_i^2} = \frac{\bar{m}_0^2}{\bar{m}_i^2}$$

2. Postup výpočtu.

Vyrovnaná hodnota: $\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T)$

Rovnice oprav: $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T) - \boldsymbol{l}$

V lineárním tvaru: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{l}$

Pokud funkce není lineární, je nutná linearizace Taylorovým rozvojem:

$$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}_0^T) + \left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T)}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} \cdot \boldsymbol{dx} - \boldsymbol{l}$$

$$\bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}_0^T) - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}'$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}'$$

$$\left.\frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T)}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}_1(\boldsymbol{x}^T)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}_1(\boldsymbol{x}^T)}{\partial x_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}_n(\boldsymbol{x}^T)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{l}}_n(\boldsymbol{x}^T)}{\partial x_k} \end{pmatrix}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

2. Postup výpočtu.

Normální rovnice:

$$\boldsymbol{A^T \cdot P \cdot A \cdot dx + A^T \cdot P \cdot l' = 0}$$

Řešení normálních rovnic:

$$\boldsymbol{dx = -(A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot l'}$$

Vyrovnaná měření :

$$\boldsymbol{x = x_0 + dx}$$

Opravy:

$$\boldsymbol{v = A \cdot dx + l'}$$

Vyrovnaná měření:

$$\boldsymbol{\bar{l} = l + v}$$

3. Směrodatné odchylky.

Směrodatná odchylka jednotková

$$s_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}}{n-k}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}}$$

Směrodatné odchylky vyrovnaných neznámých (kovarianční matice):

$$\boldsymbol{M_x} = \sigma_0^2 \cdot \boldsymbol{N}^{-1}$$

Směrodatná odchylka vyrovnaného měření

$$\boldsymbol{M_{\bar{l}}} = \sigma_0^2 \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{N}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T$$

4. Příklady.

Příklad č. 1: Vyrovnání volného stanoviska.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{dx} = -(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}'$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}'$$

$$\bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}_0^T) - \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}'$$

4. Příklady.

Příklad č. 1: Vyrovnání volného stanoviska.

$$\varphi_{ij} = \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right) + o_p + o_K \ ,$$

$$sd_{ij} = \sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + \left(Y_j - Y_i\right)^2 + \left(Z_j - Z_i\right)^2} \ ,$$

$$d_{ij} = \sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + \left(Y_j - Y_i\right)^2} \ ,$$

$$\zeta_{ij} = \arccos\left(\frac{Z_j - Z_i}{\sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + \left(Y_j - Y_i\right)^2 + \left(Z_j - Z_i\right)^2}}\right),$$

$$\omega_{ijk} = \arctan\left(\frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i}\right) - \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right).$$

$$h_{ij} = Z_j - Z_i \ ,$$

4. Příklady.

Příklad č. 1: Vyrovnání volného stanoviska.

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial X_i} = \frac{\Delta Y_{ij}}{{d_{ij}}^2}, \qquad \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial X_j} = -\frac{\Delta Y_{ij}}{{d_{ij}}^2},$$

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial Y_i} = -\frac{\Delta X_{ij}}{{d_{ij}}^2}, \qquad \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial Y_j} = \frac{\Delta X_{ij}}{{d_{ij}}^2},$$

$$\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial o_p} = 1 .$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial X_i} = -\frac{\Delta X_{ij}}{d_{ij}}, \qquad \frac{\partial d_{ij}}{\partial X_j} = \frac{\Delta X_{ij}}{d_{ij}},$$

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial Y_i} = -\frac{\Delta Y_{ij}}{d_{ij}}, \qquad \frac{\partial d_{ij}}{\partial Y_j} = \frac{\Delta Y_{ij}}{d_{ij}},$$

4. Příklady.

Příklad č. 2: Vázaná síť.

5. Metody řešení normálních rovnic.

a) Výpočet inverzní matice (jak odpovídá odvozením)
   a) Jordanův algoritmus (Gaussova eliminace).
   b) LU rozklad.
   c) QR rozklad.
   d) Pseudoinverze

b) Přímé řešení normálních rovnic
   a) Gaussova eliminační metoda.
   b) Choleskyho metoda.
   c) Metoda postupné iterace.
      a) Newtonovo řešení.
      b) Gaussovo řešení.

a) Přímé řešení rovnic oprav pseudoinverzí

b) Řešení inverze singulární matice normálních rovnic

5. Metody řešení normálních rovnic.

a) Výpočet inverzní matice
    a) Jordanův algoritmus (Gaussova eliminace).

$$(\boldsymbol{N}|\boldsymbol{E}) \rightarrow (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{N}^{-1})$$

5. Metody řešení normálních rovnic.

a) Výpočet inverzní matice (jak odpovídá odvozením)
b) LU rozklad.

Trojúhelníkový rozklad čtvercové invertované matice, kde $\boldsymbol{L}$ je dolní trojúhelníková matice a $\boldsymbol{U}$ horní trojúhelníková matice. Rozklad existuje, pokud je matice $\boldsymbol{N}$ regulární

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}$$

Matici $\boldsymbol{L}$ lze získat například Gaussovou eliminací obdobně jako u předchozí metody, matici $\boldsymbol{U}$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{L}^{-1}$$

$$\boldsymbol{N}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{L}^{-1}$$

Výpočet inverze dolní trojúhelníkové matice je jednoduchý, vždy je to také dolní trojúhelníková matice, na diagonále jsou reciproké hodnoty odpovídajících si prvků původní matice a ostatní prvky lze postupně dopočítat.

$$(\boldsymbol{L}^{-1})_{r,s} = -\frac{1}{\boldsymbol{L}_{s,s}} \cdot \sum_{i=s+1}^{r} \left(\boldsymbol{L}^{-1}{}_{r,i} \cdot \boldsymbol{L}_{i,s}\right)$$

5. Metody řešení normálních rovnic.

a) Výpočet inverzní matice (jak odpovídá odvozením)
b) QR rozklad.

Rozklad matice na ortonormální matici $\boldsymbol{Q}$ a horní trojúhelníkovou matici $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R}$$

$$\boldsymbol{N}^{-1} = (\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R})^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}^{T} \qquad \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{T}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{N}$$

5. Metody řešení normálních rovnic.

a) Výpočet inverzní matice (jak odpovídá odvozením)
   d) Pseudoinverze

Pojem pseudoinverze je rozšířením inverze na matice, které invertovat nelze, tj. i na matice singulární a obdélníkové.

Pokud pseudoinverze $\boldsymbol{A}^{+}$ matice $\boldsymbol{A}$ splňuje následující relace, jedná se o Moore-Penrose pseudoinverzi:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{+} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \ ,$$
$$\boldsymbol{A}^{+} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{+} \ ,$$
$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{+})^{T} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{+} \ ,$$

$$(\boldsymbol{A}^{+} \cdot \boldsymbol{A})^{T} = \boldsymbol{A}^{+} \cdot \boldsymbol{A} \ .$$

Tato pseudoinverzní matice existuje vždy a je jedinečná.

Pro invertovatelnou matici je pseudoinverzní matice shodná s maticí inverzní.

5. Metody řešení normálních rovnic.

a) Výpočet inverzní matice (jak odpovídá odvozením)
    d) Pseudoinverze

Singulární rozklad a výpočet inverzní či pseudoinverzní matice

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{V}^T$$

$\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{V}$ jsou ortonormální matice (matice levých, resp. pravých vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$) a $\boldsymbol{S}$ je diagonální matice tvořená vlastními čísly matice $\boldsymbol{A}$. Pro pseudoinverzní matici pak platí:

$$\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{V}^T)^+ = (\boldsymbol{V}^T)^+ \cdot \boldsymbol{S}^+ \cdot \boldsymbol{U}^+ \ .$$

Protože pseudoinverze ortogonální matice je rovná její transpozici, platí:

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{S}^+ \cdot \boldsymbol{U}^T \ .$$

Pseudoinverzní matice diagonální matice se vypočítá také velmi jednoduše, výsledkem je diagonální matice, která se z nenulových prvků původní matice určí takto $S_{ii}^+ = 1/S_{ii}$. Nulové prvky zůstanou nulové. Výpočet matic U, V, S není triviální a je nad rámec TCh.

☺ Konec ☺