Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

Téma č. 5: **Metoda nejmenších čtverců.**
Vyrovnání měření podmínkových.

1. **Formulace úlohy.**
2. **Odvození postupu výpočtu.**
3. **Směrodatné odchylky.**
4. **Příklady.**
5. **Vyrovnání s daným součtem.**

Metoda nejmenších čtverců. Vyrovnání měření podmínkových.

1. Formulace úlohy.

V geodetické praxi se často měří veličiny, pro které platí přesné matematické vztahy. Např. skutečné hodnoty úhlů v rovinném trojúhelníku vždy splňují podmínku uzávěru $\alpha + \beta + \gamma - 180° = 0$, mezi délkami a úhly platí sinová věta např. $a \cdot \sin(\beta) - b \cdot \sin(\alpha) = 0$, součet převýšení po obvodě uzavřeného polygonu $\Sigma\Delta H = 0$, atd.
Měříme-li tyto veličiny v nadbytečném počtu (třetí úhel nebo další stranu v trojúhelníku apod.), pak vlivem měřických chyb nesplní naměřené hodnoty přesně dané podmínky.

Abychom nalezené nesouhlasy odstranili, musíme k nim připojit opravy, tj. provedeme jejich vyrovnání. Předpokladem vyrovnání je měření aspoň jedné nadbytečné veličiny. Kdybychom vyrovnání neprovedli, dostávali bychom v geodetické síti různou výpočetní cestou různé číselné hodnoty pro délku téže strany, pro souřadnice nebo výšku téhož bodu apod.

1. Formulace úlohy.

Situace:

Je dáno n měření $l_1, \ldots, l_n$ s vahami $p_1, \ldots, p_n$. Skutečné hodnoty $\boldsymbol{L}$ měřených veličin splňují přesně r vztahů (r je počet nadbytečných měření), tzv. podmínkových rovnic

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{L}^T) = \mathbf{0}$$

Splnění totožných vztahů budeme žádat i pro vyrovnané veličiny:

$$\boldsymbol{\varphi}(\bar{\boldsymbol{l}}^T) = \mathbf{0}$$

Naměřené veličiny $\boldsymbol{l}$ tyto vztahy vlivem měřických chyb nesplní

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l}^T) = \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

Vypočtené odchylky **u** nazveme uzávěry.

Úkolem je připojením oprav k naměřeným hodnotám uzávěry anulovat. Takovýchto řešení by bylo nekonečně mnoho, protože počet hledaných oprav (tj. počet provedených měření n) je větší než počet vztahů $n > r$. Aby řešení bylo jednoznačné, přidáme další podmínku MNČ $\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} = min$.

1. Formulace úlohy.

Označení:

Měření: $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$

Podmínkové rov.: $\boldsymbol{\varphi}(\bar{\boldsymbol{l}}^T) = \mathbf{0}$

Uzávěry: $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{l}^T) = \boldsymbol{u}$

Přetvořené podmínkové rovnice (linearizace):

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

2. Odvození postupu výpočtu.

Vyrovnání pomocí korelát - tzv. Lagrangeových koeficientů (Gauss).

$$\boldsymbol{A}^{T} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

$$[a_1 \cdot \boldsymbol{v}] + U_1 = 0 \,;\, [a_2 \cdot \boldsymbol{v}] + U_2 = 0 \,;\, [a_3 \cdot \boldsymbol{v}] + U_3 = 0$$

použijeme Lagrangeova postupu, kdy vynásobíme vedlejší podmínky dvojnásobky zatím neurčených koeficientů (korelát) $-2k_i$, přičteme je k funkci $\boldsymbol{v}^{T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}$ a budeme hledat minimum pro celý součet

$$\overline{\Omega} = \boldsymbol{v}^{T} \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{k}^{T} \cdot (\boldsymbol{A}^{T} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) = min.$$

Derivujeme a pro určení minima položíme rovno nule:

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \boldsymbol{v}} = 2 \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{2} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

rovnice oprav

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k}\,.$$

2. Odvození postupu výpočtu.

Dosadíme do $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \; = \; \boldsymbol{0}$ rovnice oprav $\boldsymbol{v} \; = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k}$
Normální rovnice pro výpočet pomocných neznámých $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

Počet normálních rovnic je shodný s počtem podmínek.

$$\boldsymbol{k} = -(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{u} = -\overline{\boldsymbol{N}}^{-\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{u}$$

Opravy se vyčíslí pomocí korelát:

$$\boldsymbol{v} \; = \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k}$$

Vyrovnané veličiny

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{v},$$

Kontrola:

$$\varphi\left(\bar{\boldsymbol{l}}^T\right) = \boldsymbol{0}$$

3. Směrodatné odchylky.

Směrodatná odchylka jednotková

$$s_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}}{n-k}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-k}}$$

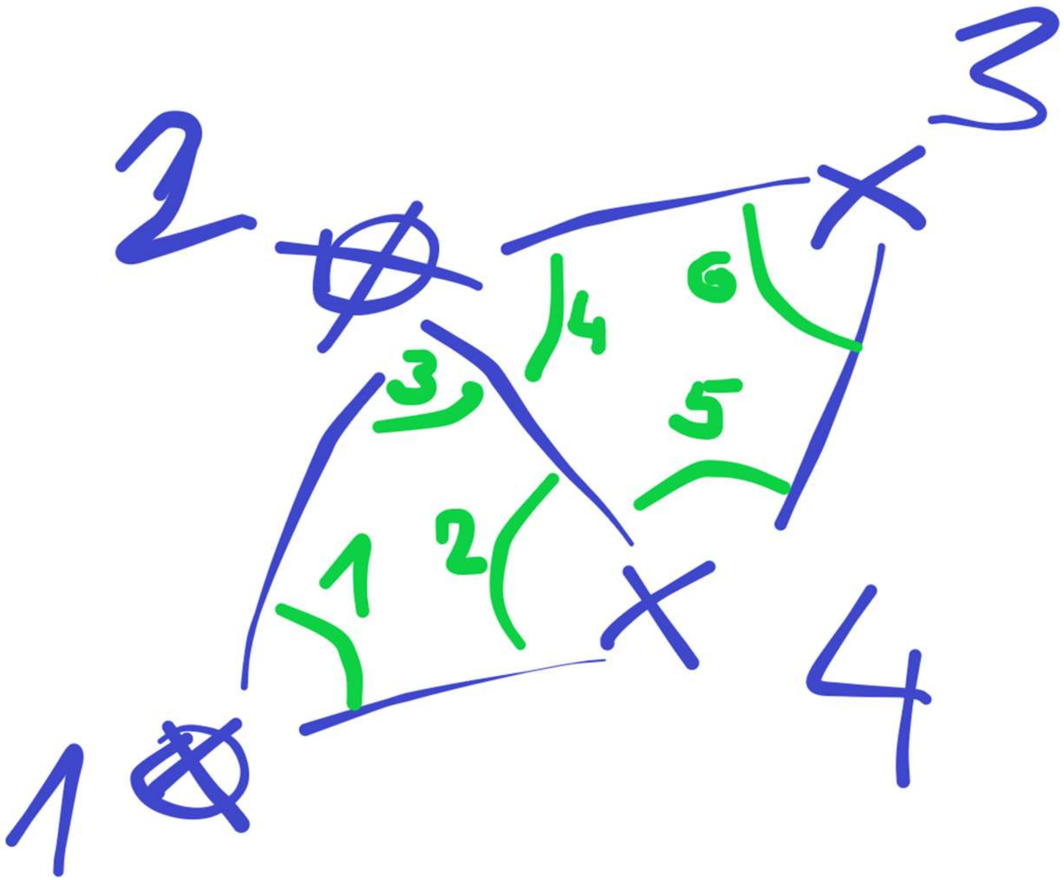
Směrodatné odchylky vyrovnaných měření (kovarianční matice):

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{x}} = \sigma_0^2 \cdot (\boldsymbol{P}^{-1} - \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \overline{\boldsymbol{N}}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P}^{-1})$$

(bez odvození).

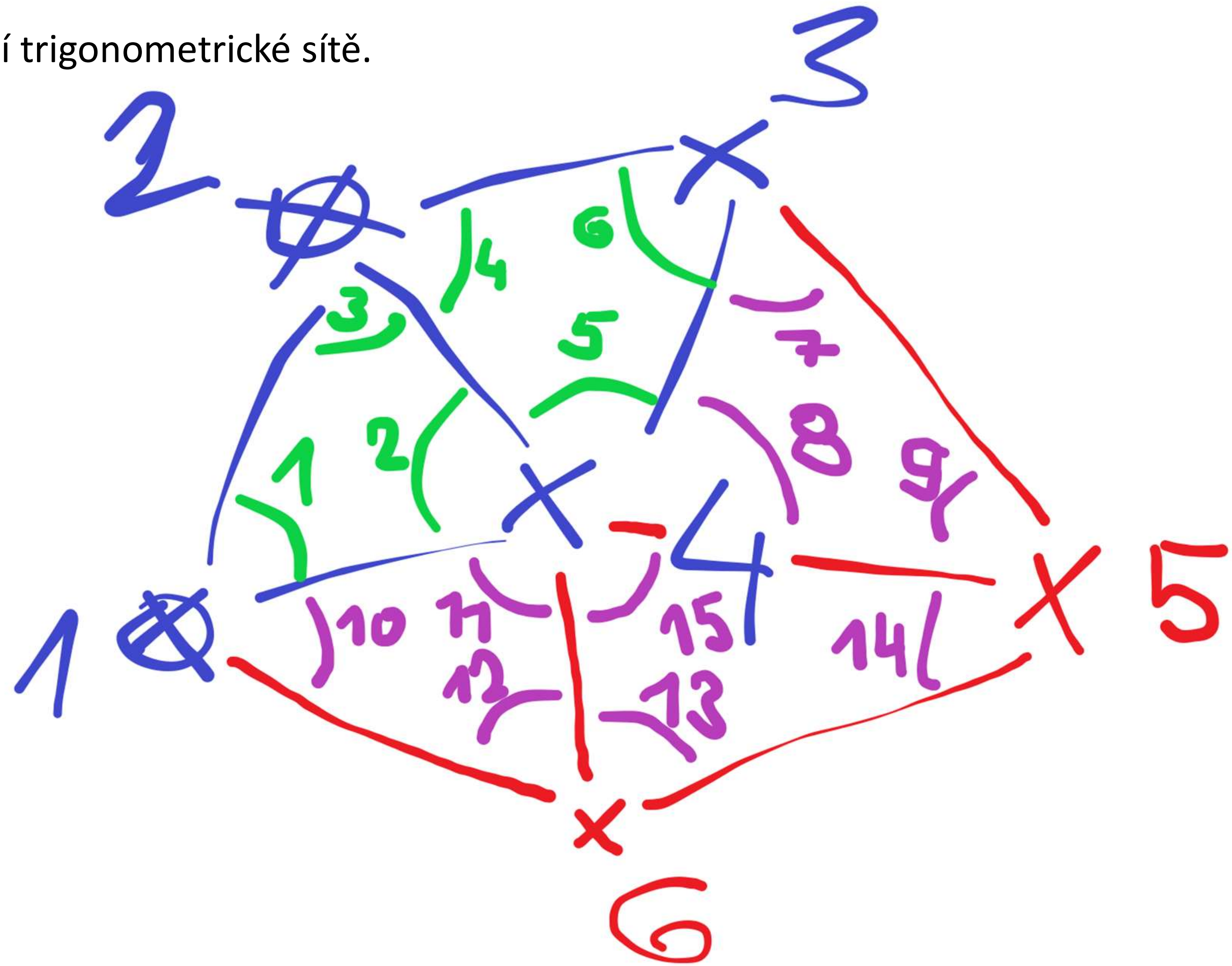
4. Příklad.

Vyrovnání trigonometrické sítě.



4. Příklad.

Vyrovnání trigonometrické sítě.



4. Příklad.

Vyrovnání vloženého nivelačního pořadu.

5. Vyrovnání s daným součtem.

V geodetické praxi se často vyskytuje úloha vyrovnat měřené veličiny vázané daným součtem (úhly v trojúhelníku nebo na stanovisku, vložený nivelační nebo polygonový pořad mezi dva dané body, uzavřený polygon). Je to speciální případ vyrovnání měření podmínkových pouze s jednou podmínkou v lineárním tvaru.

Podmínková rovnice

$$a_1 \cdot \bar{l}_1 + a_2 \cdot \bar{l}_2 + \cdots + a_n \cdot \bar{l}_n - S = 0,\ a_i = \pm 1$$

Uzávěr

$$a_1 \cdot l_1 + a_2 \cdot l_2 + \cdots + a_n \cdot l_n - S = U$$

Přetvořená podmínková rovnice

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + \cdots + a_n \cdot v_n + U = 0$$

Normální rovnice ($q_i = 1/p_i$)

$$[q] \cdot K + U = 0,\ K = -U/[q] \qquad (\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{u})$$

5. Vyrovnání s daným součtem.

Normální rovnice ($q_i = 1/p_i$)

$$[q] \cdot K + U = 0,\ K = -U/[q] \qquad (\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{u})$$

Opravy

$$v_i = q_i \cdot a_i \cdot K = -a_i \cdot q_i \cdot U/[q]$$

Odchylka od daného součtu se rozděluje podle MNČ na jednotlivé veličiny úměrně jejich reciprokým váhám.

Vyrovnaná měření:

$$\bar{l}_i = l_i + v_i$$

Směrodatná odchylka vyrovnané veličiny:

$$\sigma_{\bar{l}_i} = \frac{|U|}{[q]} \cdot \sqrt{q_i \cdot ([q] - q_i)}$$

Směrodatná odchylka částečného součtu vyrovnaných hodnot

$$\sigma_s = \frac{|U|}{[q]} \cdot \sqrt{S^I \cdot S^{II}}\ ,\ S^I = [q]_1^k,\ S^{II} = [q]_{k+1}^n$$

☺ Konec ☺