Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

Téma č. 10: **Vyrovnání geodetické sítě volné, vázané.**

1. **Vázaná síť, volná síť (vlastnosti, odlišnosti, použití).**
2. **„Měřené“ veličiny vstupující do vyrovnání.**
3. **Vyrovnání vázané geodetické sítě MNČ zprostředkující – opakování.**
4. **Vyrovnání volné sítě**
5. **Příklady.**

Vyrovnání geodetické sítě volné, vázané.

Pro výpočet vyrovnání geodetické sítě je nutné mít naměřená data (směry, délky, zenitové úhly, atd.) převedená do roviny zobrazení, tj. redukované délky apod., jejich směrodatné odchylky a přibližné souřadnice určovaných bodů.
Při vyrovnání se jako neznámé volí určované souřadnice bodů, rovnice oprav se sestavují pro jednotlivá měření. Pokud jsou měřeny osnovy vodorovných směrů, k neznámým přibude ještě orientační posun pro každou osnovu.

Geodetická síť může být vyrovnávána jako vázaná nebo jako volná. Vázaná síť obsahuje dostatečný počet bodů, které jsou součástí sítě a jejich souřadnice se neurčují (pro prostorovou síť je minimální počet bodů dva (pokud jsou měřeny zenitové úhly nebo převýšení, což je obvyklé), pro rovinnou síť také dva (postačí bod a jedna souřadnice bodu druhého)), volná síť nikoli. U volné sítě je proto nutno modifikovat výpočet, obvykle dodáním dodatečných podmínek a výpočtem vyrovnání měření zprostředkujících s podmínkami pro neznámé.

- Výšková síť (1D)
- Rovinná síť (2D)
- Prostorová síť (3D)

1. „Měřené“ veličiny vstupující do vyrovnání..

- vodorovný směr φ_{ij} (součást osnovy vodorovných směrů),
- vodorovná délka d_{ij},
- šikmá délka sd_{ij},
- zenitový úhel ζ_{ij},
- vodorovný úhel ω_{ijk} (měřený např. v laboratorních jednotkách), pozor, nelze jednoduše přepočítat měřenou osnovu směrů na úhly např. od prvního bodu osnovy, tyto úhly jsou vzájemně závislé a tuto závislost je nutné započítat do váhové matice.
- převýšení h_{ij} (měřené např. přesnou nivelací).
- souřadnicové rozdíly ΔX, ΔY nebo (a) ΔZ (vektor) např. pomocí GNSS měření, tyto souřadnicové rozdíly jsou ovšem korelované.
- směrník $\alpha_{i,j}$ určený např. gyroteodolitem.

$$h_{ij} = Z_j - Z_i$$

$$\varphi_{ij} = \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right) + o_p + o_K$$

$$\zeta_{ij} = \arccos\left(\frac{Z_j - Z_i}{\sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + \left(Y_j - Y_i\right)^2 + \left(Z_j - Z_i\right)^2}}\right)$$

$$sd_{ij} = \sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + \left(Y_j - Y_i\right)^2 + \left(Z_j - Z_i\right)^2}$$

$$d_{ij} = \sqrt{\left(X_j - X_i\right)^2 + \left(Y_j - Y_i\right)^2}$$

$$\omega_{ijk} = \arctan\left(\frac{Y_k - Y_i}{X_k - X_i}\right) - \arctan\left(\frac{Y_j - Y_i}{X_j - X_i}\right)$$

3. Vyrovnání vázané geodetické sítě MNČ zprostředkující – opakování.

$$\boldsymbol{X} = (X_1 \quad Y_1 \quad Z_1 \quad X_2 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Z_{n-1} \quad X_n \quad Y_n \quad Z_n \quad o_1 \quad \cdots \quad o_p)^T$$

$$\boldsymbol{l} = (t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad \cdots \quad t_m) \qquad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial X_1} & \frac{\partial t_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial t_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial t_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial t_1}{\partial X_n} & \frac{\partial t_1}{\partial Y_n} & \frac{\partial t_1}{\partial Z_n} & \frac{\partial t_1}{\partial o_1} & \cdots & \frac{\partial t_1}{\partial o_p} \\ \frac{\partial t_2}{\partial X_1} & \frac{\partial t_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial t_2}{\partial Z_1} & \frac{\partial t_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial t_2}{\partial X_n} & \frac{\partial t_2}{\partial Y_n} & \frac{\partial t_2}{\partial Z_n} & \frac{\partial t_2}{\partial o_1} & \cdots & \frac{\partial t_2}{\partial o_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial t_m}{\partial X_1} & \frac{\partial t_m}{\partial Y_1} & \frac{\partial t_m}{\partial Z_1} & \frac{\partial t_m}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial t_m}{\partial X_n} & \frac{\partial t_m}{\partial Y_n} & \frac{\partial t_m}{\partial Z_n} & \frac{\partial t_3}{\partial o_1} & \cdots & \frac{\partial t_m}{\partial o_p} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P} = diag(p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \cdots \quad p_m)$$

$$\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_0) - \boldsymbol{l}$$

3. Vyrovnání vázané geodetické sítě MNČ zprostředkující – opakování.

$$\boldsymbol{dx} = -\left(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}'$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}'$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}}{n - k}}$$

$$\boldsymbol{M} = \sigma_0^2 \cdot \left(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A}\right)^{-1}$$

4. Vyrovnání volné sítě.

V případě volné sítě jsou všechny souřadnice považovány za neznámé, síť není umístěna do prostoru a matice normálních rovnic je singulární. Je třeba do výpočtu doplnit dodatečné informace, jak má být síť do prostoru umístěna (a otočena).

Výhody:

Tvar a rozměr volné sítě není přizpůsobován žádnému rámci (pevných bodů) a proto se často používá pro práce, pro které přesností nevyhovuje existující geodetická síť (např. S-JTSK) a je třeba ji místně zpřesnit.

Nevýhody:

Výsledek nenavazuje na existující body, výpočtem se změní všechny souřadnice bodů.

Poznámka:

Situaci lze ještě řešit uvážením chyb měření ve výchozích veličinách a to např. použitím pseudobodu nebo použitím výchozích souřadnic jako měření. Tento smíšený koncept je náplní druhého semestru předmětu).

4. Vyrovnání volné sítě.

Počet nutných parametrů pro umístění volné sítě do prostoru

Lineární transformace v n-rozměrném prostoru:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{T}$$

kde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}$ ... vektory souřadnic v jedné a druhé soustavě (rozměr (n, 1)),
$\boldsymbol{\Lambda}$ ... matice měřítkových koeficientů (n, n),
$\boldsymbol{R}$ ... matice rotace (n, n),
$\boldsymbol{T}$ ... vektor translací (n, 1).

Matice v třírozměrném prostoru:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_X & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_Y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_Z \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ je ortonormální, pokud se nemá zkreslit tvar, $\boldsymbol{\Lambda} = \lambda$.

4. Vyrovnání volné sítě.

Počet nutných parametrů pro umístění volné sítě do prostoru

- Prostorová (3D) síť – maximálně sedm parametrů $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma, T_X, T_Y, T_Z)$ a tedy sedm podmínek umístění do prostoru,
  - pokud je měřena alespoň jedna délka, definuje měřítko a měřítkový koeficient λ se neuplatní,
  - pokud je měřen zenitový (nebo výškový či ekvivalentní úhel), je dán směr svislé osy Z a neuplatní se otočení α a β,
  - pokud je měřena vodorovná délka, je dán směr vodorovné roviny XY a neuplatní se otočení α a β,
  - pokud je měřeno převýšení, je dán směr svislé osy Z a neuplatní se otočení α a β.
- Rovinná (2D) síť – maximálně čtyři parametry $(\lambda, \gamma, T_X, T_Y)$,
  - pokud je měřena alespoň jedna (vodorovná) délka, definuje měřítko a měřítkový koeficient λ se neuplatní.
- Výšková (1D) síť – maximálně dva parametry (λ, T_Z), ačkoli měřením převýšení je dán rozměr a tedy prakticky připadá v úvahu pouze jeden parametr T_Z.

4. Vyrovnání volné sítě.

Pokud sestavíme vyrovnání volné sítě jako u sítě vázané, bude matice normálních rovnic singulární.

Možnosti řešení:

Řešení pseudoinverzí

- normální rovnice se namísto inverzí řeší pseudoinverzí, řešení vyjde stejně jako za přidání dodatečné podmínky $\boldsymbol{dx}^T \cdot \boldsymbol{dx} = min$,
- výpočet směrodatných odchylek je pak jiný.

Vyřazení souřadnic z vyrovnání

- Vyřadí se nutný počet souřadnic z vyrovnání, pak se jedná o vyrovnání vázané sítě.

Umístění do prostoru se provede dodáním podmínek (vyrovnání zprostředkujících s podmínkami):

- **Fixování souřadnic podmínkami**
- **Bod a směrník**
- **Helmertova transformace**

4. Vyrovnání volné sítě.

Fixování souřadnic podmínkami

- normální rovnice

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{dx} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = 0$$

Podmínky (příklad pro jednu souřadnici):

$$\varphi(\boldsymbol{x}^T) = X_1 - X_{1,0} = 0$$

Po linearizaci:

$$(X_{1,0} + dx_1) - X_{1,0} = 0 \quad , \Rightarrow dx_1 = 0.$$

Pro 2D síť je takto nutné zafixovat 3 souřadnice, výsledek je obdobný jako u varianty bod a směrník, pouze směrodatné odchylky na zafixovaných souřadnicích jsou nulové (a ostatní o to větší, tj pokud se vypočítá např. směrodatná odchylka délky, musí vyjít stejně ze všech variant vyrovnání volné sítě).

4. Vyrovnání volné sítě.

Bod a směrník

Do vyrovnání se jako v předchozím případě doplní podmínky pro neznámé, tentokrát ve tvaru jednoho neměnného bodu jako v předchozím případě a neměnného směrníku. Normální rovnice jsou stejné jako v předchozím případě. Podmínka pro směrník σ_{12}:

$$\varphi(\boldsymbol{x}^T) = \sigma_{12} - \sigma_{12,0} = 0$$

po linearizaci

$$\sigma_{12,0} + \frac{\Delta Y_{12}}{d_{12}^2} \cdot dX_1 - \frac{\Delta X_{12}}{d_{12}^2} \cdot dY_1 - \frac{\Delta Y_{12}}{d_{12}^2} \cdot dX_2 + \frac{\Delta X_{12}}{d_{12}^2} \cdot dY_2 - \sigma_{12,0} = 0$$

Matice linearizovaných podmínek $\boldsymbol{B}^T$ pro případ fixovaného bodu 1 a fixovaného směrníku σ_{12} (3D):

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta Y_{12}}{d_{12}^2} & -\frac{\Delta X_{12}}{d_{12}^2} & 0 & -\frac{\Delta Y_{12}}{d_{12}^2} & \frac{\Delta X_{12}}{d_{12}^2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \quad .$$

4. Vyrovnání volné sítě.

Helmertova transformace

Podmínka pro umístění v této variantě je minimalizace kvadrátu posunu bodů použitých pro podmínku tak, aby nedošlo k deformaci sítě, tj. při zachování pravidel lineární transformace.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \end{pmatrix}$$

(měřítko se vzhledem k měřeným délkám neuplatní, úhel otočení bude velmi malý)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ T_X \\ T_Y \end{pmatrix} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{h} \qquad \boldsymbol{X}_V = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_0) \cdot \boldsymbol{h}$$

Řešení pokračuje linerizací a minimalizací za podmínky mnč.
Bez odvození podmínka: $\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dX} = \boldsymbol{0}$

4. Vyrovnání volné sítě.

Helmertova transformace

Rovinná síť s měřenými délkami a úhly

$$\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} Y_{1,0} & -X_{1,0} & Y_{2,0} & -X_{2,0} & \cdots & Y_{n,0} & -X_{n,0} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{dx} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = 0$$

4. Příklad.

☺ Konec ☺