Teorie chyb a vyrovnávací počet 2

Téma č. 3: **Robustní metody vyrovnání: m - odhady**

1. Úvod.
2. Metoda maximální věrohodnosti.
3. Jednotlivé odhady.
4. Postup použití.

Teorie chyb a vyrovnávací počet 2

Téma č. 3: **Robustní metody vyrovnání: m - odhady**

1. Úvod.
2. Metoda maximální věrohodnosti.
3. Princip m-odhadů.
4. Jednotlivé m-odhady.
5. Postup použití.

1. Úvod.

Vlastnosti robustních metod

- Nedávají tak kvalitní výsledky, ale neselhávají za přítomnosti odlehlých měření.
- Metody jsou mnohé různé, od nejpoužívanějších M-odhadů až po metody založené na metodě Monte-Carlo, RANSAC apod.

Využitelnost v geodézii:

- Vyhledání hrubých chyb a odlehlých měření, výpočet bez zásadního pokřivení modelů úlohy.
- (Následně se provede výpočet pomocí MNČ).

2. Metoda maximální věrohodnosti.

Jedná o řešení minimalizační úlohy. Základem je požadavek na maximální věrohodnost řešení daný výrazem:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \arg\sup_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{x})$$

kde $\boldsymbol{l}$ je náhodný vektor (měření), $L(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{x})$ věrohodnostní (pravděpodobnostní) funkce, $\overline{\boldsymbol{x}}$ odhad parametrů (neznámých).

Jinak řečeno řešení má být nejpravděpodobnější.

Jestliže náhodný vektor pozorování $\boldsymbol{l}$ má hustotu pravděpodobnosti $f(\boldsymbol{x})$, která závisí na fixních a neznámých parametrech $\boldsymbol{x}$, pak pro věrohodnostní funkci platí:

$$L(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \; .$$

2. Metoda maximální věrohodnosti.

Lineární model úlohy

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_u \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{x}$ je vektor neznámých, $\boldsymbol{l}$ vektor pozorování (měření), $\boldsymbol{\varepsilon}$ vektor skutečných chyb, $\boldsymbol{A}$ matice lineárních (linearizovaných) vztahů mezi měřením a neznámými parametry. Počet měření n je větší než počet neznámých u, jde o úlohu s vyrovnáním. Měření jsou nezávislá.

Rovnice pozorování pro měření l_i:

$$l_i + \varepsilon_i = \boldsymbol{a}_i^T \cdot \boldsymbol{x} \,.$$

Neznámé ve vektoru $\boldsymbol{x}$ jsou určovány metodou maximální věrohodnosti.

2. Metoda maximální věrohodnosti.

Jestliže hustota pravděpodobnosti $p(l_i)$ pozorování l_i je úměrná funkci $f(l_i, \boldsymbol{x})$, tj. platí

$$p(l_i) \propto f(l_i, \boldsymbol{x}) \ .$$

Hustota pravděpodobnosti $p(\boldsymbol{l})$ pro nezávislá měření je pak:

$$p(\boldsymbol{l}) \propto \prod_{i=1}^{n} f(l_i, \boldsymbol{x}) = f(l_1, \boldsymbol{x}) \cdot f(l_2, \boldsymbol{x}) \cdot \dots \cdot f(l_n, \boldsymbol{x}) \ .$$

Pro metodu maximální věrohodnosti je nutný předpoklad znalosti rozdělení pravděpodobnosti.

2. Metoda maximální věrohodnosti.

Metoda nejmenších čtverců:

S ohledem na centrální limitní větu se dále předpokládá, že měření mají normální rozdělení $N(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}, \sigma^2 \cdot \boldsymbol{I})$). Potom pro věrohodnostní funkci platí:

$$L(\boldsymbol{l}; \boldsymbol{x}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{2\sigma^2}}.$$

Úkolem je maximalizovat věrohodnost (pravděpodobnost), problém se řeší diferenciací podle neznámých $\boldsymbol{x}$ a směrodatných odchylek σ^2 a položením získaných výrazů nule. Vzhledem k vlastnostem funkce normálního rozdělení i věrohodnostní funkce lze s výhodou derivovat logaritmus této funkce:

$$\ln L(\boldsymbol{l}; \boldsymbol{x}, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}.$$

(Po derivaci podle neznámých $\boldsymbol{x}$ je výsledkem odhad metody nejmenších čtverců).

2. Metoda maximální věrohodnosti.

Maximalizuje se tedy výraz

$$\prod_{i=1}^{n} f(l_i, \boldsymbol{x})$$

nebo s použitím předchozích logaritmovaných vzorců se minimalizuje

$$\sum_{i=1}^{n}(-\ln f(l_i, \boldsymbol{x})) = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}\right),$$

(což vede při předpokladu normániho rozdělení k metodě nejmenších čtverců).

3. Princip m-odhadů.

Pro výpočet je tedy potřeba znát pravděpodobnostní funkci (funkci rozdělení pravděpodobnosti) měření, neboť není splněn předpoklad normálního rozdělení.

Výpočet robustních M-odhadů je dán minimalizací výrazu:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\big(l_i, g_i(x)\big) = min.$$

kde ρ je vhodná odhadová funkce („score function“), $g_i(\boldsymbol{x})$ je funkce neznámých parametrů. Odhadová funkce není konstantní jako v případě metody nejmenších čtverců. Derivace odhadové funkce (tzv. vlivová funkce):

$$\psi(l_i, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial g_i(x)} \rho\big(l_i, g_i(x)\big)$$

Odhad $\overline{\boldsymbol{x}}$ neznámých parametrů $\boldsymbol{x}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho\big(l_i, g_i(x)\big)}{\partial \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}} = \sum_{i=1}^{n} \psi(l_i, \widehat{\boldsymbol{x}}) \cdot \frac{\partial g_i(\widehat{\boldsymbol{x}})}{\partial \widehat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}} = 0 \text{ pro } k \in \{1, \dots, u\}.$$

3. Princip m-odhadů.

Robustní odhad lze nalézt pomocí funkce $\psi(l_i, \overline{\boldsymbol{x}})$. O robustní odhad se jedná pouze v případě, kdy funkce $\psi(l_i, \overline{\boldsymbol{x}})$ je ohraničená, jelikož je úměrná influenční (vlivové) funkci, která popisuje efekt dalšího pozorování na odhad.

Spolu s bodem selhání se jedná o důležité charakteristiky popisující konkrétní robustní odhad. **Bod selhání** je velmi zjednodušeně řečeno nejmenší podíl pozorování, které po nahrazení libovolnými hodnotami mohou vést k chybným hodnotám odhadu.

Pro běžné výpočty je ještě vhodné zavést pojem normované chyby, tj. podíl chyby a příslušné směrodatné odchylky měření:

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} - l_i}{\sigma_i} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}.$$

Z toho plyne odhadová funkce:

$$\rho\big(l_i, g_i(\boldsymbol{x})\big) = \rho(\hat{\varepsilon}_i)\ .$$

3. Princip m-odhadů.

Robustní odhad lze nalézt pomocí funkce $\psi(l_i, \overline{\boldsymbol{x}})$. O robustní odhad se jedná pouze v případě, kdy funkce $\psi(l_i, \overline{\boldsymbol{x}})$ je ohraničená, jelikož je úměrná influenční (vlivové) funkci, která popisuje efekt dalšího pozorování na odhad.
Spolu s bodem selhání se jedná o důležité charakteristiky popisující konkrétní robustní odhad. **Bod selhání** je velmi zjednodušeně řečeno nejmenší podíl pozorování, které po nahrazení libovolnými hodnotami mohou vést k chybným hodnotám odhadu.
Pro běžné výpočty je ještě vhodné zavést pojem normované chyby, tj. podíl chyby a příslušné směrodatné odchylky měření:

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} - l_i}{\sigma_i} = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}.$$

Z toho plyne odhadová funkce:

$$\rho\big(l_i, g_i(\boldsymbol{x})\big) = \rho(\hat{\varepsilon}_i)\ .$$

Protože platí $g_i(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{a}_i^T \cdot \overline{\boldsymbol{x}}$, lze výpočet odhadu upravit na tvar

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} - l_i}{\sigma_i}\right) \cdot \frac{a_{ik}}{\sigma_i} = 0\ , \sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{v_i}{\sigma_i}\right) \cdot \frac{a_{ik}}{\sigma_i} = 0.$$

3. Princip m-odhadů.

Pro metodu nejmenších čtverců platí: Hustota pravděpodobnosti normálního rozdělení:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(x-E(x)\right)^2}{2\sigma^2}}, \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}},$$

Funkce ρ (bez konstant, po aplikaci logaritmu):

$$\rho(\varepsilon) = \ln\left(e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^2 .$$

Po derivaci:

$$\psi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \frac{\partial\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^2\right)}{\partial\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{\sigma} = -\frac{\varepsilon}{\sigma} .$$

Pro minimalizaci musí platit:

$$\sum_{i=1}^{n} -\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \cdot \frac{a_{ik}}{\sigma_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \cdot \frac{a_{ik}}{\sigma_i} = 0 .$$

3. Princip m-odhadů.

Skutečné chyby nejsou známy, budou nahrazeny jejich odhadem – opravami. Řešení normálních rovnic metodou nejmenších čtverců je výpočetně jednoduché. Aby bylo ovšem možné tento výpočet použít, normované opravy $\hat{v}_i$ je nutné formálně vynásobit korekčním koeficientem w_i. Musí tedy platit:

$$\sum_{i=1}^{n} \psi\left(\frac{v_i}{\sigma_i}\right) \cdot \frac{a_{ik}}{\sigma_i} = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot \frac{v_i}{\sigma_i} \cdot \frac{a_{ik}}{\sigma_i} = 0$$

a tedy:

$$\psi\left(\frac{v_i}{\sigma_i}\right) \cdot \frac{a_{ik}}{\sigma_i} = w_i \cdot \frac{v_i}{\sigma_i} \cdot \frac{a_{ik}}{\sigma_i}, \Rightarrow \qquad \boxed{w_i = \psi\left(\frac{v_i}{\sigma_i}\right) / \frac{v_i}{\sigma_i}.}$$

Korekční člen w_i představuje určitou váhu měření l_i, jejichž velikost je přímo závislá na velikosti normované opravy $\hat{v}_i$, tj. $w_i = w_i(v_i, \sigma_i)$.
Po zavedení korekčního členu lze provést úpravu:

$$\frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot v_i \cdot a_{ik} = 0 \qquad \text{pro } k \in \{1, \dots, u\}.$$

3. Princip m-odhadů.

Dále je možné definovat diagonální váhovou matici $\boldsymbol{W}$:

$$\boldsymbol{W} = diag(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

a řešit normální rovnice ve tvaru:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{l}\ .$$

Váhy w_i závisí na opravách v_i, tj. na odhadu neznámých $\boldsymbol{x}$. Odhad tedy musí být určován iterativně, jako první aproximaci lze použít výsledek metody nejmenších čtverců.

$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(0)} = (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{l},$$
$$\overline{\boldsymbol{x}}^{(m+1)} = \left(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{W}^{(m)} \cdot \boldsymbol{A}\right)^{-\boldsymbol{1}} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{W}^{(m)} \cdot \boldsymbol{l}\ ,$$
$$\boldsymbol{v}^{(m)} = \boldsymbol{A} \cdot \overline{\boldsymbol{x}}^{(m)} - \boldsymbol{l}\ .$$

3. Princip m-odhadů.

Příklad fungování
– výpočet průměru (L1 norma, $[|v|]$ = min.)

Př.: 0 odlehlých

x/m	MNČ v/mm
1,236	1
1,239	-2
1,240	-3
1,237	0
1,234	3
1,238	-1
1,235	2
ϕ	1,237

1 odlehlé měření

x/m	MNČ v/mm	RM v/mm	MNČ (6) v/mm
1,236	5	2	1
1,239	2	-1	-2
1,240	1	-2	-3
1,237	4	1	0
1,234	7	4	3
1,238	3	0	-1
1,265	-24	-27	-28
ϕ	1,241	1,238	1,237

2 odlehlá měření

x/m	MNČ v/mm	RM v/mm	MNČ(5) v/mm
1,236	10	3	1
1,239	7	0	-2
1,240	6	-1	-3
1,237	9	2	0
1,234	12	5	3
1,268	-22	-29	-31
1,265	-19	-26	-28
ϕ	1,246	1,239	1,237

3. Princip m-odhadů.

Příklad fungování
– výpočet průměru (L1 norma, $[|v|]$ = min.)

2 odlehlá měření

x/m	MNČ v/mm	RM v/mm	MNČ(5) v/mm
1,236	10	3	1
1,239	7	0	-2
1,240	6	-1	-3
1,237	9	2	0
1,234	12	5	3
1,268	-22	-29	-31
1,265	-19	-26	-28
ϕ	1,246	1,239	1,237

3 odlehlá měření

x/m	MNČ v/mm	RM v/mm	MNČ(4) v/mm
1,236	14	4	2
1,239	11	1	-1
1,240	10	0	-2
1,237	13	3	1
1,264	-14	-24	-26
1,268	-18	-28	-30
1,265	-15	-25	-27
ϕ	1,250	1,240	1,238

3 odlehlá měření (V)

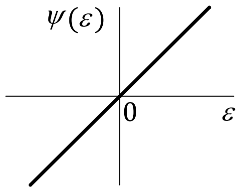
x/m	MNČ v/mm	RM v/mm	MNČ(4) v/mm
1,236	57	4	2
1,239	54	1	-1
1,240	53	0	-2
1,237	56	3	1
1,264	29	-24	-26
1,268	25	-28	-30
1,565	-272	-325	-327
ϕ	1,293	1,240	1,238

4. Jednotlivé m-odhady.

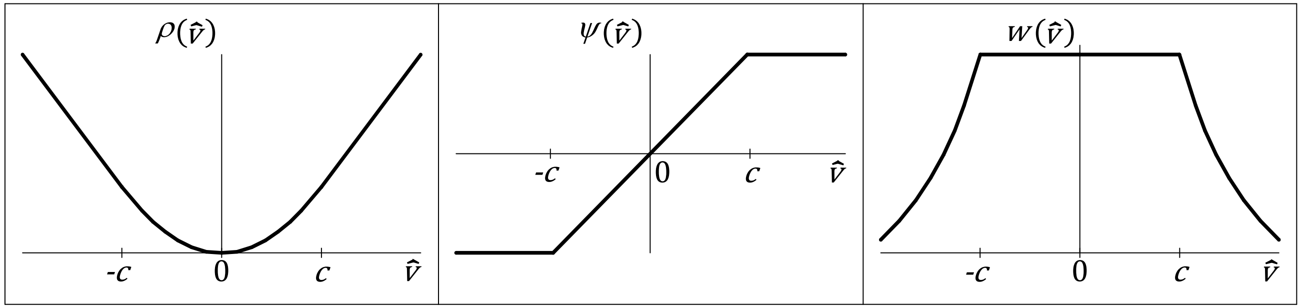
4.1 Huberův m-odhad

Při volbě robustní odhadové funkce vychází Huber z normálního rozdělní náhodné veličiny. Jeho řešení je založeno na nahrazení okrajových částí normálního rozdělení pravděpodobnosti Laplaceovým rozdělením (speciální formou exponenciálního rozdělení). Tímto způsobem je dosaženo ohraničení vlivové funkce $\psi(\varepsilon)$ a dosažení robustnosti odhadu. Toto řešení vede k větší pravděpodobnosti výskytu odlehlých měření na okrajích rozdělení. **c** se volí v rozmezí 1,5 až 2,0.

Huberův odhad – odhadová, vlivová, váhová funkce



$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$	**velikost** $\hat{v}$
$\frac{1}{2}\hat{v}^2$	$\hat{v}$	1	$\lvert\hat{v}\rvert \leq c$
$c\lvert\hat{v}\rvert - \frac{1}{2}c^2$	$c\ \mathrm{sign}(\hat{v})$	$\frac{c}{\lvert\hat{v}\rvert}$	$\lvert\hat{v}\rvert > c$

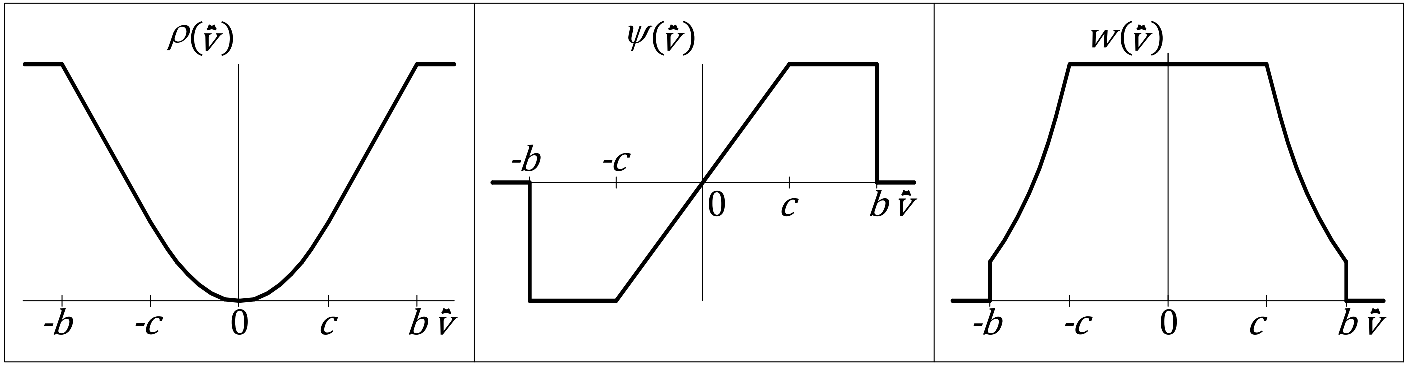


4. Jednotlivé m-odhady.

4.2 Modifikovaný Huberův odhad

Oproti klasickému Huberovu odhadu uvažuje modifikovaný odhad možnost existence hrubých chyb měření, jejichž vliv se snaží zcela omezit. Překročí-li normovaná oprava měření interval $\langle -b, +b \rangle$, je připouštěno působení hrubých chyb a příslušnému odlehlému měření je přiřazena nulová váha, měření je tedy pro další výpočet zcela vyloučeno. Konstanty jsou standardně voleny $c = 2{,}0$ a $b = 3{,}0$.

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$	**velikost** $\hat{v}$
$\frac{1}{2}\hat{v}^2$	$\hat{v}$	1	$\lvert\hat{v}\rvert \leq c$
$c\lvert\hat{v}\rvert - \frac{1}{2}c^2$	$c\ \mathrm{sign}(\hat{v})$	$\frac{c}{\lvert\hat{v}\rvert}$	$c < \lvert\hat{v}\rvert \leq b$
$cb - \frac{1}{2}b^2$	0	0	$\lvert\hat{v}\rvert > b$

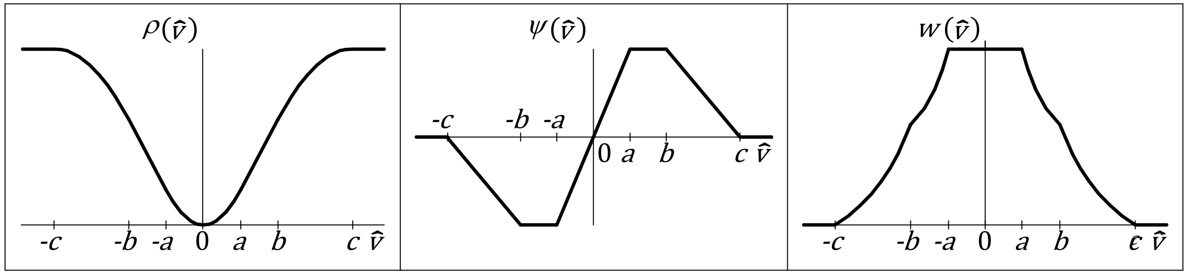


4. Jednotlivé m-odhady.

4.3 Hampelův

Hampelův odhad je navržen podobným způsobem jako modifikovaný Huberův odhad. Odhad taktéž uvažuje přítomnost hrubých chyb, jejichž vliv se snaží vyloučit, oproti modifikovanému odhadu je ovšem jeho vlivová funkce $\psi\ (\hat{v})$ spojitá a přechod mezi detekcí odlehlého měření a měření ovlivněného hrubou chybou je plynulý. Je možno standardně volit $a = 2$, $b = 4$ a $c = 8$.

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$	**velikost** $\hat{v}$
$\frac{1}{2}\hat{v}^2$	$\hat{v}$	1	$\lvert\hat{v}\rvert < a$
$a\lvert\hat{v}\rvert - \frac{1}{2}a^2$	$a\,\mathrm{sign}(\hat{v})$	$\frac{a}{\lvert\hat{v}\rvert}$	$a \le \lvert\hat{v}\rvert < b$
$ab - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a(c-b)\left[1-\left(\frac{c-\lvert\hat{v}\rvert}{c-b}\right)^2\right]$	$a\frac{c-\lvert\hat{v}\rvert}{c-b}\mathrm{sign}(\hat{v})$	$a\frac{c-\lvert\hat{v}\rvert}{c-b}\frac{1}{\lvert\hat{v}\rvert}$	$b \le \lvert\hat{v}\rvert < c$
$ab - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a(c-b)$	0	0	$\lvert\hat{v}\rvert \ge c$

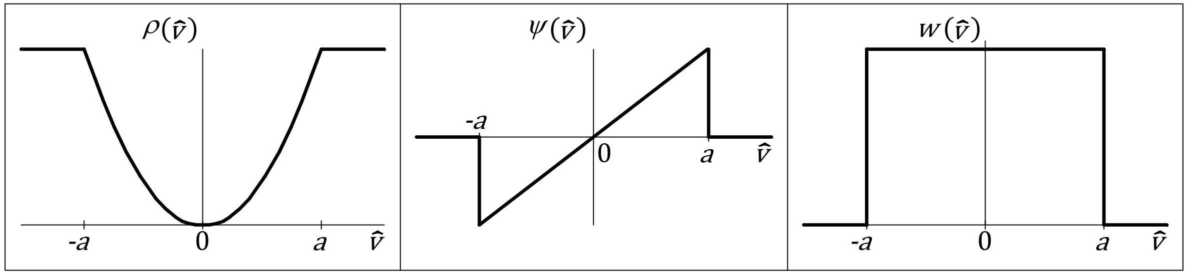


4. Jednotlivé m-odhady.

4.4 Talwarův odhad

U Talwarova odhadu není uvažováno žádné plynulé snižování vlivu odlehlých měření v závislosti na jejich narůstající normované opravě $\hat{v}$. Tento odhad rozlišuje pouze dva stavy detekce měření. V prvním případě se normovaná oprava měření $\hat{v}$ nachází uvnitř stanoveného intervalu $\langle -a, +a \rangle$, měření není odlehlé a podílí se na určení odhadu neznámých parametrů plným svým vlivem (váha tohoto měření w je rovna jedné). V opačném případě, kdy se normovaná oprava nachází vně stanoveného intervalu, je měření považováno za odlehlé a z výpočtu odhadu neznámých parametrů je vyřazeno (váha tohoto měření w je rovna nule). Hranice intervalu standardně je volena $a = 2{,}795$.

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$	velikost $\hat{v}$
$\frac{1}{2}\hat{v}^2$	$\hat{v}$	1	$\lvert\hat{v}\rvert \leq a$
$\frac{1}{2}a^2$	0	0	$\lvert\hat{v}\rvert > a$

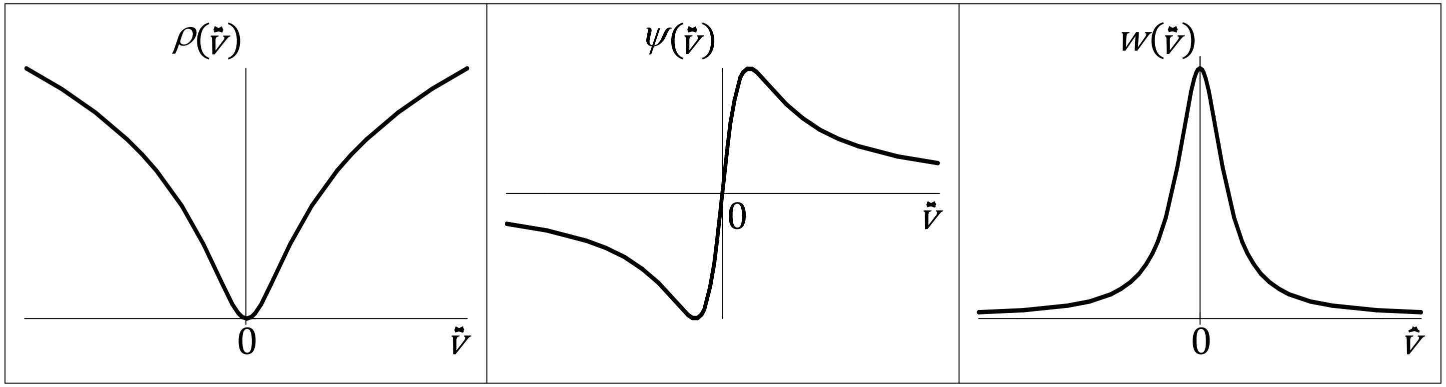


4. Jednotlivé m-odhady.

4.5 Odhad Cauchyho rozdělení

Funkce hustoty pravděpodobnosti standardizovaného Cauchyho rozdělní. Vlivová, resp. váhová funkce konverguje k 0 při $\hat{v} \rightarrow \pm\infty$, vliv odlehlých hodnot je plynule redukován. Odhad Cauchyho rozdělení odlehlé hodnoty z dalších výpočtů nevylučuje, pouze snižuje jejich vliv, který se stává při narůstající hodnotě normované opravy $\hat{v}$ zanedbatelným.

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$
$\log(1+\hat{v}^2)$	$\frac{2\hat{v}}{1+\hat{v}^2}$	$\frac{2}{1+\hat{v}^2} = \frac{1}{1+\hat{v}^2}$

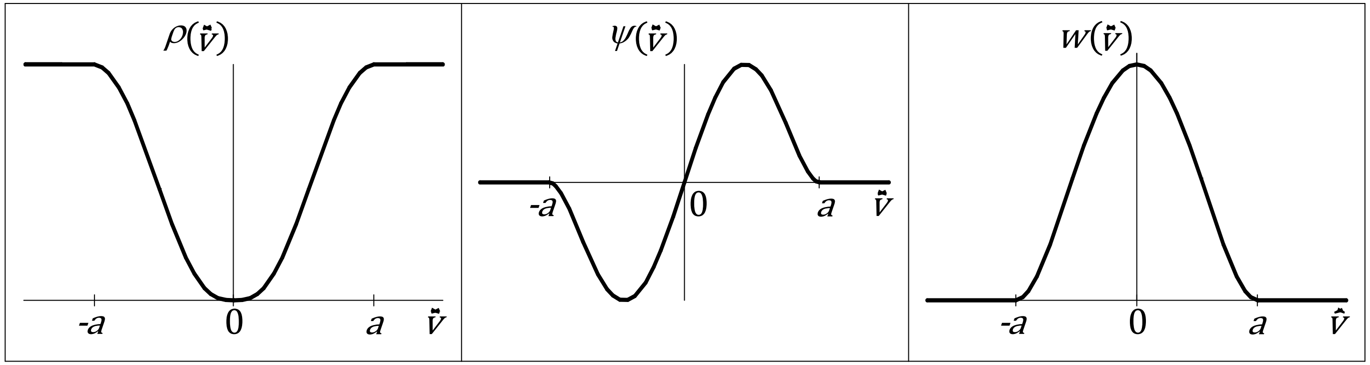


4. Jednotlivé m-odhady.

4.6 Tukeyho biweight odhad

Odhad připouští plný vliv měření pouze v případě nulové normované opravy. Při $\hat{v} \rightarrow \pm\ a$ se vliv posuzovaného měření postupně snižuje. Překročí-li normovaná oprava měření stanovený interval $\langle -a, +a \rangle$, měření je přiřazena nulová váha a jeho podíl na určení odhadu neznámých parametrů je zcela potlačen. Standardně je voleno $a = 4{,}685$.

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$	**velikost** $\hat{v}$
$\frac{1}{6}a^2\left(1-\left[1-\left(\frac{\lvert\hat{v}\rvert}{a}\right)^2\right]^3\right)$	$\hat{v}\left(1-\left(\frac{\hat{v}}{a}\right)^2\right)^2$	$\left(1-\left(\frac{\hat{v}}{a}\right)^2\right)^2$	$\lvert\hat{v}\rvert \le a$
$\frac{1}{6}a^2$	0	0	$\lvert\hat{v}\rvert > a$

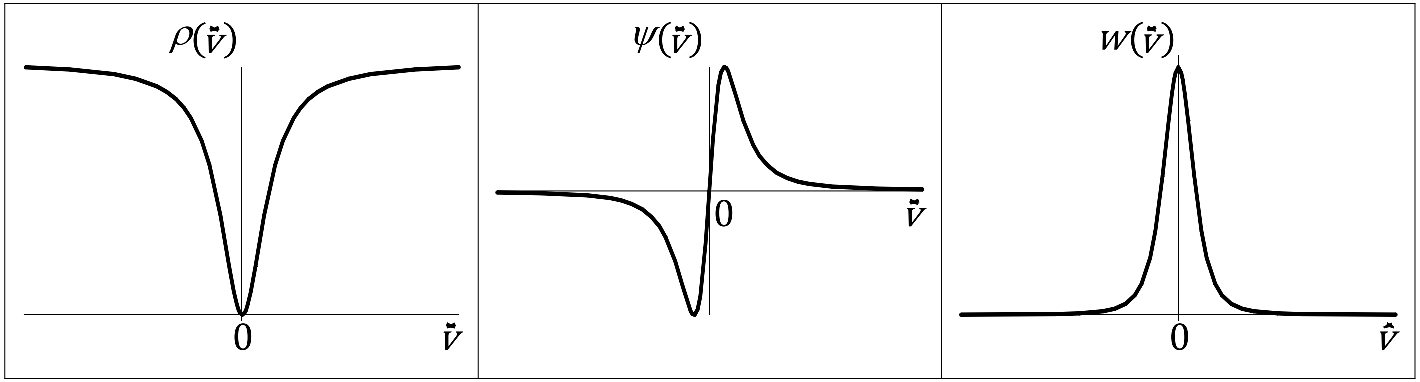


4. Jednotlivé m-odhady.

4.7 German – McClureův odhad

German – McClureův odhad je svým předpisem dosti podobný výše uváděnému odhadu Cauchyho rozdělení. Oproti odhadu Cauchyho rozdělení je pokles vlivu měření při narůstající normované opravě mnohem výraznější (pokles je oproti odhadu Cauchyho rozdělení umocněn).

$\rho(\hat{v})$	$\psi(\hat{v})$	$w(\hat{v})$
$\frac{\hat{v}^2}{2(1+\hat{v}^2)}$	$\frac{\hat{v}}{(1+\hat{v}^2)^2}$	$\frac{1}{(1+\hat{v}^2)^2}$

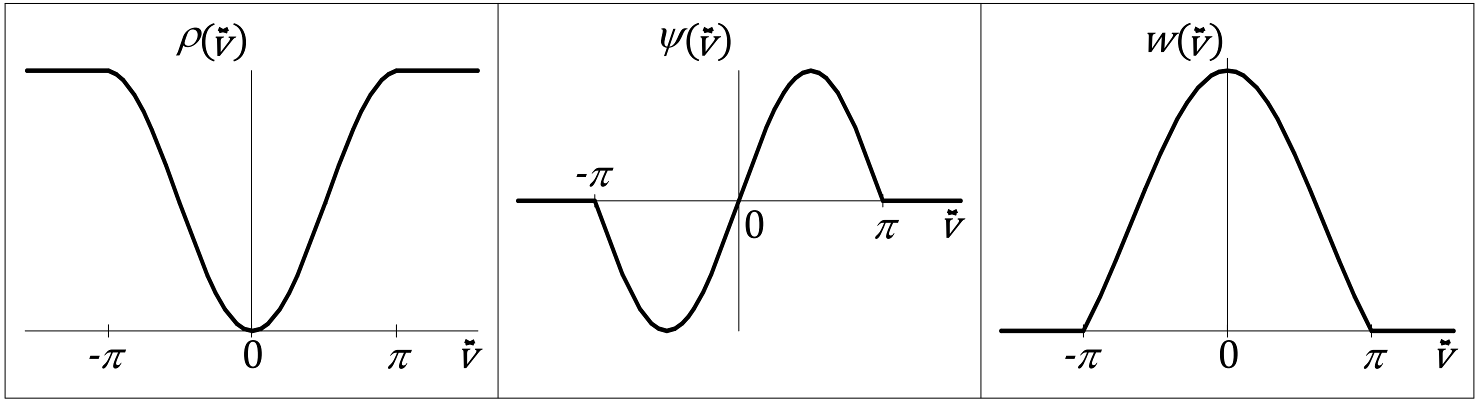


4. Jednotlivé m-odhady.

4.8 Andrewsův odhad

Jak je patrno z uvedených vztahů a přiložených obrázků, je průběh vlivové funkce Andrewsova odhadu navržen ve tvaru sinusoidy v intervalu ⟨-π,+π⟩, mimo tento interval je vlivová funkce nulová.

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$	**velikost $\hat{v}$**
$-\cos(\hat{v})$	$\sin(\hat{v})$	$\frac{1}{\hat{v}}\sin(\hat{v})$	$\lvert\hat{v}\rvert \le \pi$
1	0	0	$\lvert\hat{v}\rvert > \pi$

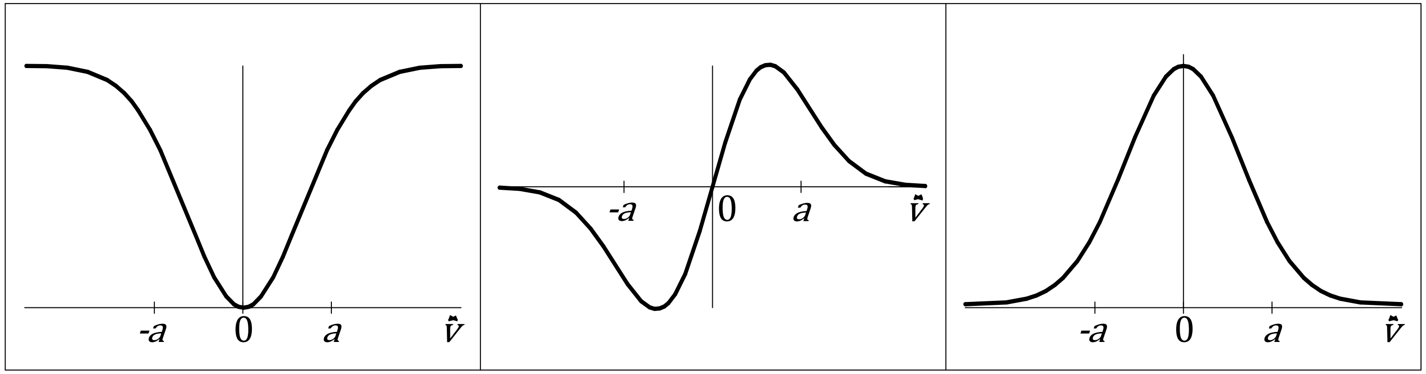


4. Jednotlivé m-odhady.

4.9 Welschův odhad

Stejně jako v případě odhadu Cauchyho rozdělení či German – McClureova odhadu není váhová funkce ohraničena žádným intervalem, při jehož překročení je příslušnému měření přiřazena nulová váha. Při iteračním zpracování dat (vyrovnání geodetických měření) se odlehlá měření z výpočtu nevylučují, pouze je jejich vliv potlačen. konstanta Welschova odhadu standardně nastavována na a= 2,985.

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$
$\frac{1}{2}a^2\left(1-e^{-\left(\frac{\hat{v}}{a}\right)^2}\right)$	$\hat{v}e^{-\left(\frac{\hat{v}}{a}\right)^2}$	$e^{-\left(\frac{\hat{v}}{a}\right)^2}$

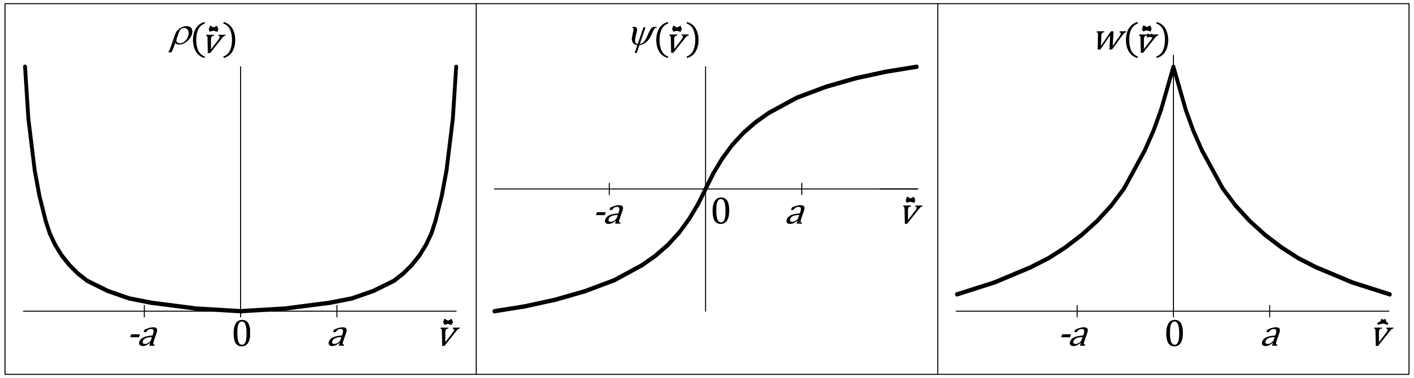


4. Jednotlivé m-odhady.

4.10 Fair odhad

Odhad připouští plný vliv měření pouze v případě nulové normované opravy. S rostoucí absolutní hodnotou normované opravy váha odlehlého měření hyperbolicky klesá. Konstanta Fair odhadu standardně volena a=1,4.

$\rho(\hat{v})$	$\psi(\hat{v})$	$w(\hat{v})$
$\frac{a^2\|\hat{v}\|}{a-\log\left(1+\frac{\|\hat{v}\|}{a}\right)}$	$\frac{\|\hat{v}\|}{1+\frac{\|\hat{v}\|}{a}}$	$\frac{1}{1+\frac{\|\hat{v}\|}{a}}$

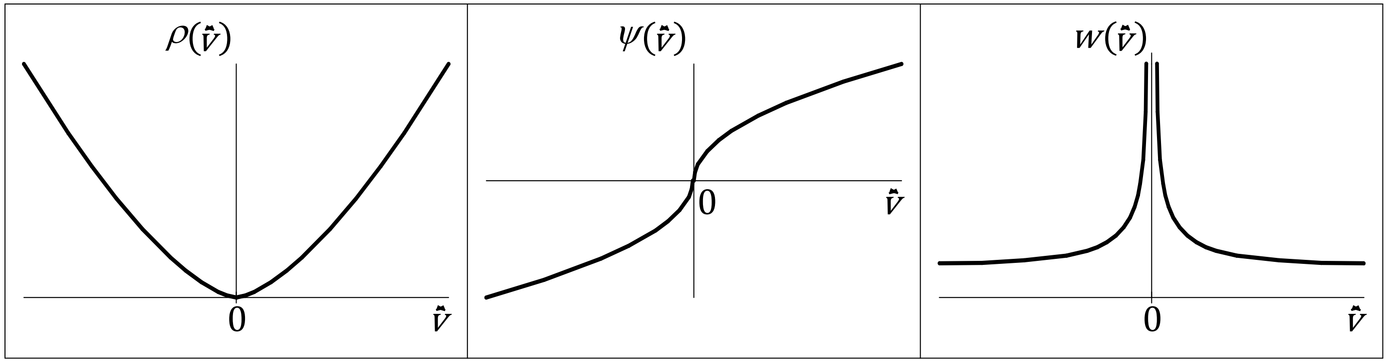


4. Jednotlivé m-odhady.

4.11 L_p – norma

Aby byl odhad pomocí Lp – norma robustní, musí být splněna podmínka $1 \leq p < 2$.
Dále uvedené grafické průběhy funkcí Lp – normy byly konstruovány pro p=1,5.

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$
$\|\hat{v}\|^p$	$p\ \mathrm{sign}(\hat{v})\ \|\hat{v}\|^{p-1}$	$\|\hat{v}\|^{p-2}$

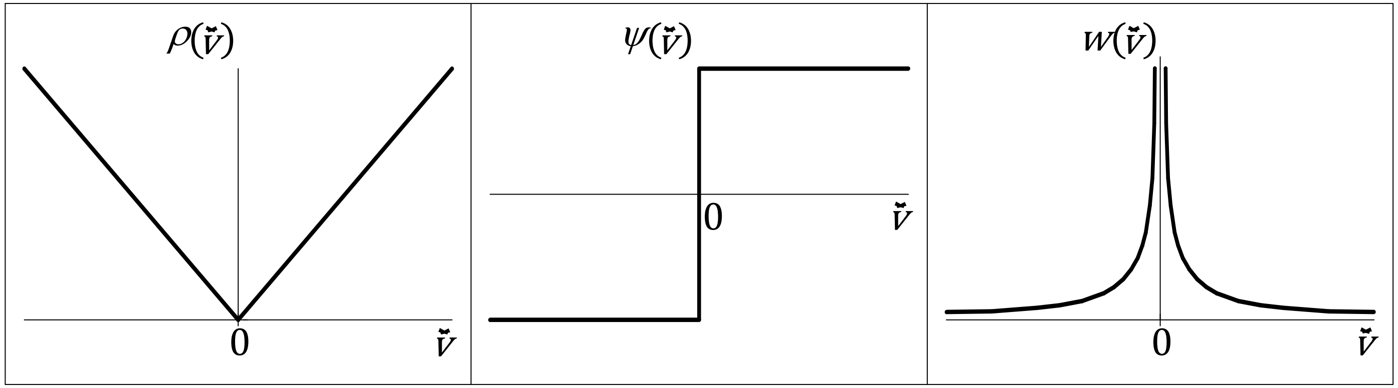


4. Jednotlivé m-odhady.

4.12 L_1 – norma

Aby byl odhad pomocí Lp – norma robustní, musí být splněna podmínka $1 \leq p < 2$.
Dále uvedené grafické průběhy funkcí Lp – normy byly konstruovány pro p=1,5.

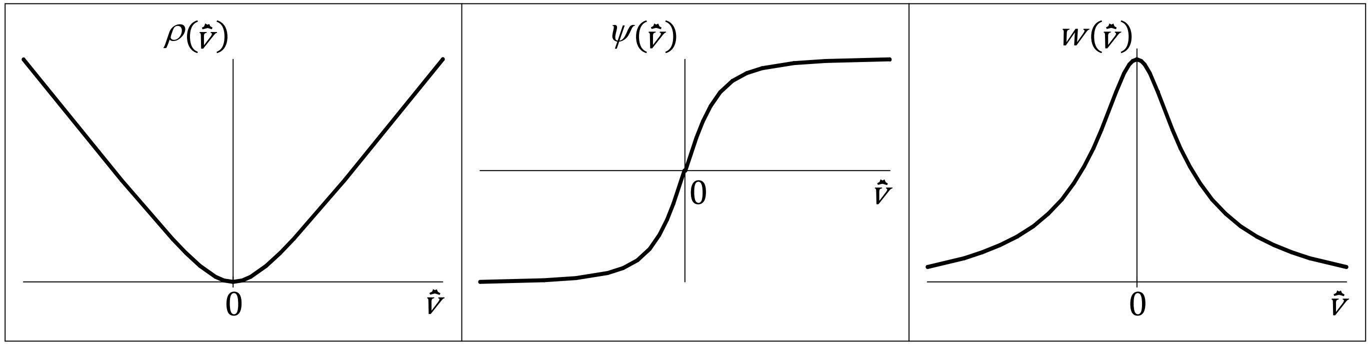
$\rho(\hat{v})$	$\psi(\hat{v})$	$w(\hat{v})$
$\lvert\hat{v}\rvert$	$\mathrm{sign}(\hat{v}) = \frac{\hat{v}}{\lvert\hat{v}\rvert}$	$\frac{1}{\lvert\hat{v}\rvert}$



4. Jednotlivé m-odhady.

4.13 Hybridní L1/L2 – norma

$\rho(\hat{v})$	$\psi\ (\hat{v})$	$w(\hat{v})$
$2\left(\sqrt{1+\frac{\hat{v}^2}{2}}-1\right)$	$\frac{\hat{v}}{\sqrt{1+\frac{\hat{v}^2}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\hat{v}^2}{2}}}$



4. Jednotlivé m-odhady.

4.14 Dánská metoda

Z hlediska základních principů nelze Dánskou metodu řadit mezi odhady založené na teorii maximální věrohodnosti (tj. mezi výše uvedené M-odhady). Jedná se o empiricky vyvinutou metodu, která je přímo zaměřena na vyhodnocení (vyrovnání) geodetických či fotogrammetrických měření při působení odlehlých hodnot. Metoda se zabývá návrhem váhových předpisů a jejich užitím při iterativním řešení soustavy normálních rovnic při postupné úpravě vah měření.

Krok iterace	$w(\hat{v})$	
	$\|\hat{v}\| < 3.0$	$\|\hat{v}\| \geq 3.0$
$i = 1$	1	1
$i = 2, 3$	1	$e^{-0{,}05\,\|\hat{v}\|^{4{,}4}}$
$i > 3$	1	$e^{-0{,}05\,\|\hat{v}\|^{3{,}0}}$

5. Postup použití.

1. Výpočet MNČ
2. Změna váhového koeficientu w a opakovaný výpočet.
3. Identifikace odlehlých měření na základě velikosti oprav.
4. Výpočet MNČ s vyřazenými odlehlými meřeními (nebo upravenými vahami u měření „nutných nebo potřebných“).

☺ Konec ☺