Teorie chyb a vyrovnávací počet 2

Téma č. 5: **Speciální postupy ve vyrovnání: Eliminace neznámých. Sekvenční vyrovnání. Chyby ve výchozích veličinách.**

1. Eliminace neznámých.
2. Sekvenční vyrovnání.
3. Chyby ve výchozích veličinách.

1. Eliminace neznámých

V některých případech vyrovnání není cílem vypočítat všechny neznámé, které jsou pro matematický popis nutné a pak lze využít dále uvedený postup. Normální rovnice mají tvar:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{b}$$

kde $\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' = -\boldsymbol{b}$.

Vektor neznámých $\boldsymbol{x}$ lze rozdělit na neznámé určované ($\boldsymbol{x}_1$) a neurčované ($\boldsymbol{x}_2$), a tedy i pro vektor přírůstků $\boldsymbol{dx}$ platí:

$$\boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{dx}_1 \quad \boldsymbol{dx}_2)^T$$

Normální rovnice pak lze formálně zapsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{dx}_1 \\ \boldsymbol{dx}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix} .$$

1. Eliminace neznámých

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{N}_{11} & \boldsymbol{N}_{12} \\ \boldsymbol{N}_{21} & \boldsymbol{N}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{dx}_1 \\ \boldsymbol{dx}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}.$$

kde platí $\boldsymbol{N}_{21} = \boldsymbol{N}_{12}^T$.

$$\boldsymbol{N}_{\mathbf{11}} \cdot \boldsymbol{dx}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{N}_{\mathbf{12}} \cdot \boldsymbol{dx}_{\mathbf{2}} = \boldsymbol{b}_1$$
$$\boldsymbol{N}_{\mathbf{21}} \cdot \boldsymbol{dx}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{N}_{\mathbf{22}} \cdot \boldsymbol{dx}_{\mathbf{2}} = \boldsymbol{b}_2$$

Pro neurčované neznámé pak z druhé rovnice platí:

$$\boldsymbol{dx}_{\mathbf{2}} = \boldsymbol{N}_{\mathbf{22}}^{-\mathbf{1}} \cdot (\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{N}_{\mathbf{21}} \cdot \boldsymbol{dx}_{\mathbf{1}})$$

Po dosazení do první rovnice za $\boldsymbol{dx}_{\mathbf{2}}$:

$$\boldsymbol{N}_{\mathbf{11}} \cdot \boldsymbol{dx}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{N}_{\mathbf{12}} \cdot \boldsymbol{N}_{\mathbf{22}}^{-\mathbf{1}} \cdot (\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{N}_{\mathbf{21}} \cdot \boldsymbol{dx}_{\mathbf{1}}) = \boldsymbol{b}_1$$

1. Eliminace neznámých

$$\boldsymbol{N_{11}} \cdot \boldsymbol{dx_1} + \boldsymbol{N_{12}} \cdot \boldsymbol{N_{22}^{-1}} \cdot (\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{N_{21}} \cdot \boldsymbol{dx_1}) = \boldsymbol{b}_1$$

Po úpravách vznikne nový tvar normálních rovnic, které již neobsahují „eliminované“ neznámé:

$$\boldsymbol{N}' \cdot \boldsymbol{dx_1} = \boldsymbol{b}'$$

kde
$$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N_{11}} - \boldsymbol{N_{12}} \cdot \boldsymbol{N_{22}^{-1}} \cdot \boldsymbol{N_{21}}$$
$$\boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{N_{12}} \cdot \boldsymbol{N_{22}^{-1}} \cdot \boldsymbol{b}_2$$

Lze takto eliminovat neznámé z výpočtu a tím zmenšit velikost řešené soustavy (invertované matice) za cenu další inverze matice $\boldsymbol{N_{22}}$.

$$\boldsymbol{dx_1} = (\boldsymbol{N}')^{-1} \cdot \boldsymbol{b}' = \left(\boldsymbol{N_{11}} - \boldsymbol{N_{12}} \cdot \boldsymbol{N_{22}^{-1}} \cdot \boldsymbol{N_{21}}\right)^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{N_{12}} \cdot \boldsymbol{N_{22}^{-1}} \cdot \boldsymbol{b}_2\right)$$

2. Sekvenční vyrovnání.

Doposud bylo vyrovnání prezentováno jako úloha zpracovávající měření. Vyrovnání ale může zpracovávat v podstatě libovolná data, v případě úlohy zvané sekvenční vyrovnání se jedná o výsledky předchozího vyrovnání.

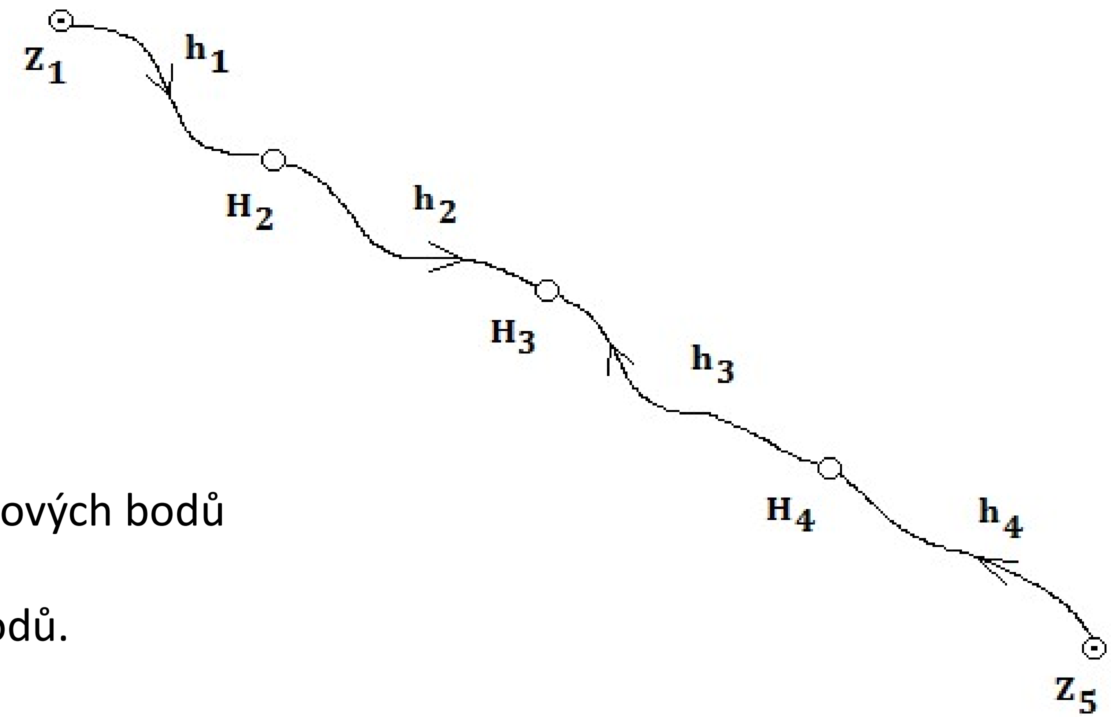
Jednoduchým ilustrujícím příkladem je vyrovnání nivelační sítě rozdělené na více nezávislých částí, které jsou jednotlivě vyrovnány. Tyto výsledky jsou potom společně zpracovány sekvenčním vyrovnáním, jehož výsledky a směrodatné odchylky jsou stejné jako při zpracování všech měření najednou.

Stejným způsobem může být část sítě vyrovnána samostatně a zbytek měření vyrovnán až s výsledky prvního vyrovnání. Důvodem k tomuto oddělenému (sekvenčnímu) vyrovnáním může být jak přílišné množství měření pro současné zpracování, tak také například nezávislé a časově oddělené měření, které je třeba zpracovat a vyhodnotit ihned po měření a posléze je zbytečné provádět celý výpočet znovu.

Pro výpočet je třeba, aby měření vyrovnávaná v jednotlivých oddělených částech byla nezávislá (tj. žádné měření nesmí být použito ve více než jednom vyrovnání), a kromě výsledků vyrovnání (většinou souřadnice nebo výšky nebo obojí) musí být k dispozici také jejich kovarianční matice, ve které jsou obsaženy všechny vztahy mezi vyrovnanými veličinami.

2. Sekvenční vyrovnání.

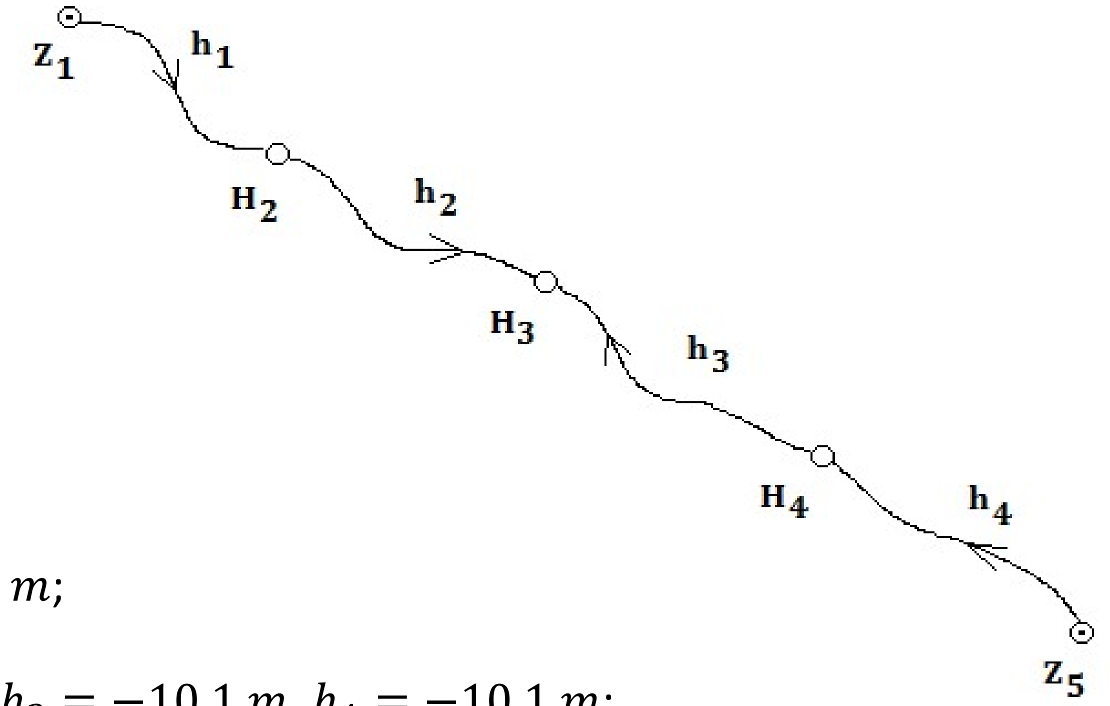
Příklad:



- Z_1 a Z_5 jsou známé výšky koncových bodů
- H_2, H_3 a H_4 určované výšky bodů.
- Měření bylo prováděno ve dvou etapách, nejprve ze Z_1 na H_2 (převýšení h_1) a dále na H_3 (převýšení h_2).
- V druhé etapě potom ze Z_5 na H_4 (h_4) a dále na H_3 (h_3).
- Směr měření převýšení je vyznačen šipkou. Obě části samy o sobě neobsahují nadbytečná měření, přesto budou řešena vyrovnáním, aby byl zřejmý obecný postup.

2. Sekvenční vyrovnání.

Příklad:



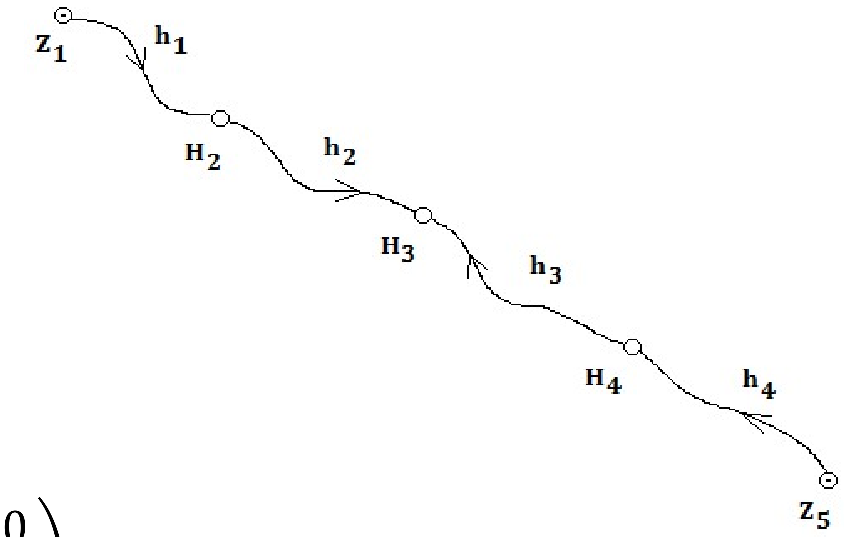
Známé a měřené hodnoty:

$Z_1 = 100{,}0\ m, Z_5 = 140{,}0\ m;$

$h_1 = 10{,}1\ m, h_2 = 10{,}1\ m, h_3 = -10{,}1\ m, h_4 = -10{,}1\ m;$

$\sigma_h = \sigma_{h_1} = \sigma_{h_2} = \cdots = \sigma_{h_4} = 0{,}05\ m\ .$

2. Sekvenční vyrovnání.



První větev

Rovnice měření:

$$h_1 = H_2 - Z_1 \,,$$
$$h_2 = H_3 - H_2 \,.$$

Pořadí neznámých:

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}.$$

Jacobiho matice derivací:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Matice vah

$$\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_h^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_h^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix}.$$

Vektor měření:

$$\boldsymbol{l'}_1 = \begin{pmatrix} -Z_1 - h_1 \\ -h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110{,}1 \\ -10{,}1 \end{pmatrix}.$$

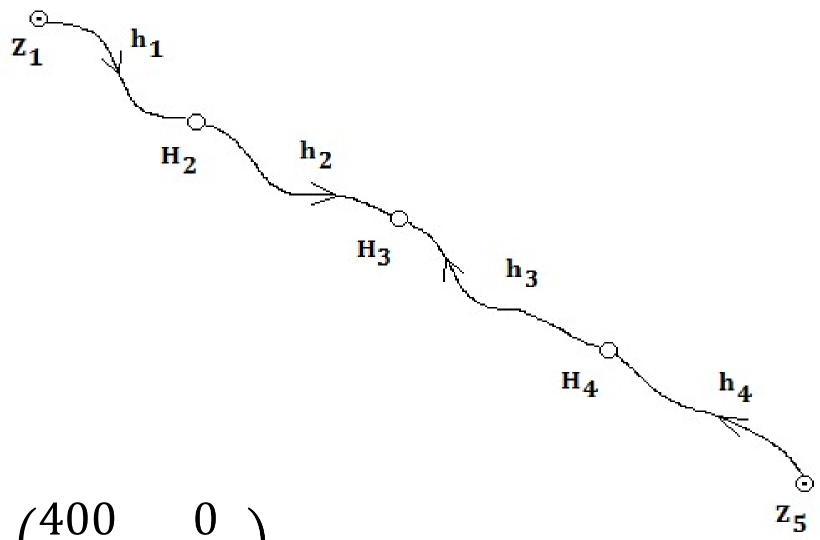
Vyrovnané hodnoty:

$$\begin{pmatrix} {}^1H_2 \\ {}^1H_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}_1 = -\left(\boldsymbol{A}_1{}^T \cdot \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{A}_1\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_1{}^T \cdot \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{l}'_1 = \begin{pmatrix} 110{,}1 \\ 120{,}2 \end{pmatrix} m \,.$$

Kovarianční matice:

$$\boldsymbol{M}_1 = \left(\boldsymbol{A}_1{}^T \cdot \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{A}_1\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0025 & 0{,}0025 \\ 0{,}0025 & 0{,}0050 \end{pmatrix} \,.$$

2. Sekvenční vyrovnání.



Druhá větev

Rovnice měření:

$$h_4 = H_4 - Z_5 \,,$$

$$h_3 = H_3 - H_4 \,.$$

Pořadí neznámých:

$$\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} H_3 \\ H_4 \end{pmatrix}.$$

Jacobiho matice derivací:

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

Matice vah:

$$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_h^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_h^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{pmatrix}.$$

Vektor měření:

$$\boldsymbol{l'}_2 = \begin{pmatrix} -Z_5 - h_4 \\ -h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -129{,}9 \\ 10{,}1 \end{pmatrix}.$$

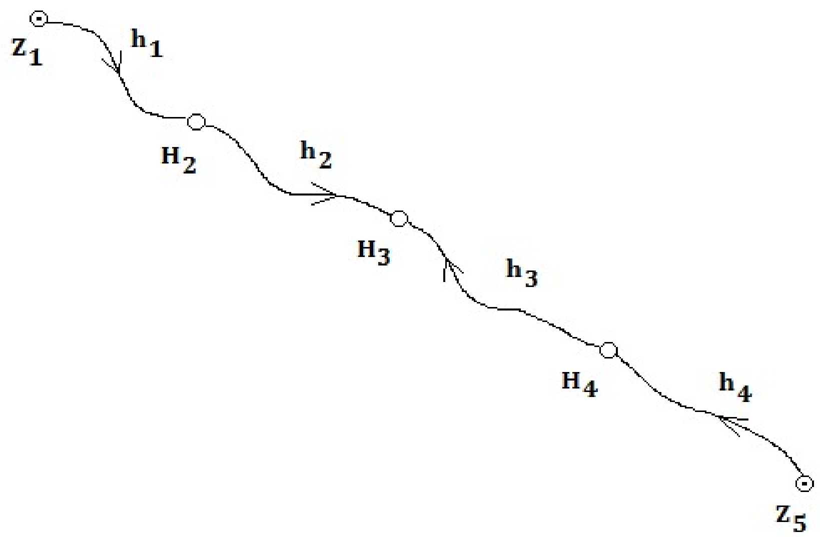
Vyrovnané hodnoty:

$$\begin{pmatrix} {}^2H_3 \\ {}^2H_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}_2 = -\left(\boldsymbol{A}_2{}^T \cdot \boldsymbol{P}_2 \cdot \boldsymbol{A}_2\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_2{}^T \cdot \boldsymbol{P}_2 \cdot \boldsymbol{l}'_2 = \begin{pmatrix} 119{,}8 \\ 129{,}9 \end{pmatrix} m \,.$$

Kovarianční matice:

$$\boldsymbol{M}_2 = (\boldsymbol{A}_2^T \cdot \boldsymbol{P}_2 \cdot \boldsymbol{A}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0050 & 0{,}0025 \\ 0{,}0025 & 0{,}0025 \end{pmatrix}.$$

2. Sekvenční vyrovnání.



Sekvenční vyrovnání:
Indexem vlevo nahoře je u „měřených“ výšek označena větev, ve které byly vyrovnány.

Rovnice měření:

$$H_2 = {}^{1}H_2 \,,$$
$$H_3 = {}^{1}H_3 \,,$$
$$H_3 = {}^{2}H_3 \,,$$
$$H_4 = {}^{2}H_4 \,.$$

Pořadí neznámých:

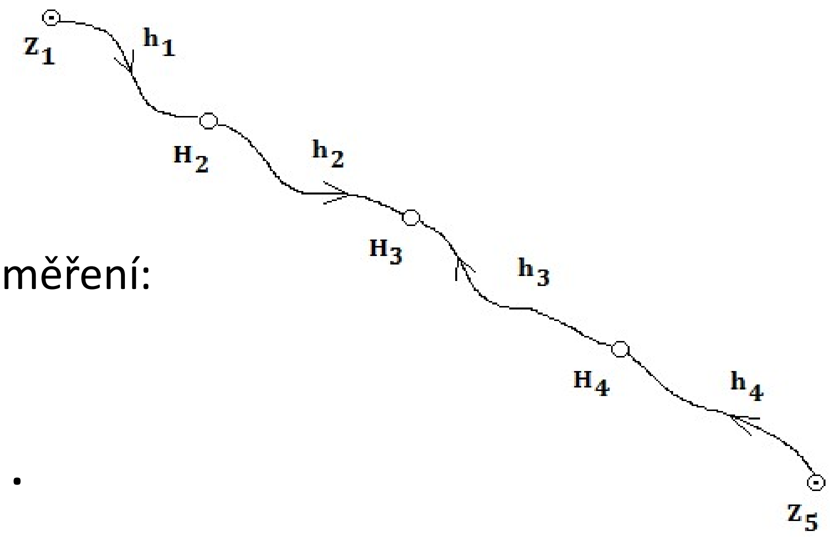
$$\boldsymbol{X}_s = \begin{pmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix}.$$

Jacobiho matice derivací:

$$\boldsymbol{A}_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice vah:

$$\boldsymbol{P}_c = \begin{pmatrix} \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0025 & 0{,}0025 & 0 & 0 \\ 0{,}0025 & 0{,}0050 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0050 & 0{,}0025 \\ 0 & 0 & 0{,}0025 & 0{,}0025 \end{pmatrix}.$$



2. Sekvenční vyrovnání.

Sekvenční vyrovnání:

Přibližné hodnoty :

$$\boldsymbol{X}_0 = \begin{pmatrix} {}^1H_2 \\ {}^1H_3 \\ {}^2H_4 \end{pmatrix}.$$

Vektor redukovaných měření:

$$\boldsymbol{l'}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ {}^1H_3 - {}^2H_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

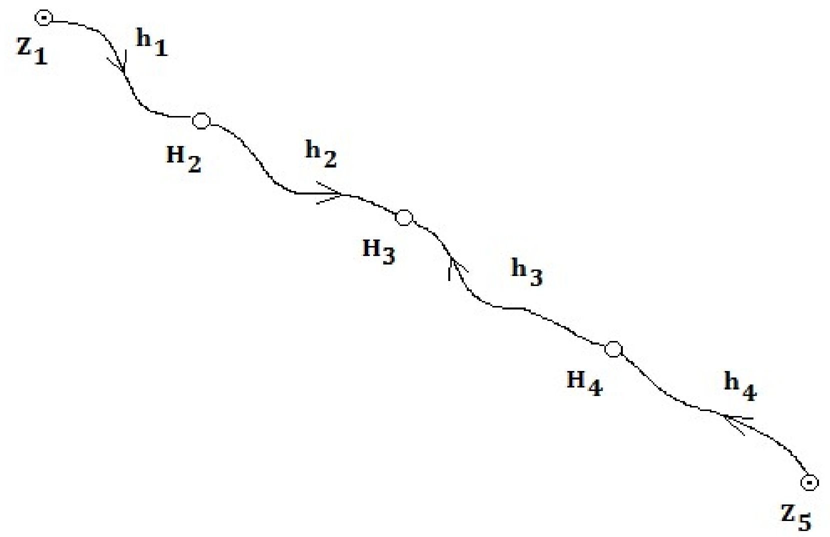
Vyrovnané hodnoty:

$$\boldsymbol{dx} = -\left(\boldsymbol{A}_s{}^T \cdot \boldsymbol{P}_s \cdot \boldsymbol{A}_s\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_s{}^T \cdot \boldsymbol{P}_s \cdot \boldsymbol{l}'_s\,,$$

$$\begin{pmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}_s = \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{dx} = \begin{pmatrix} 110{,}0 \\ 120{,}0 \\ 130{,}0 \end{pmatrix} m\,.$$

Kovarianční matice:

$$\boldsymbol{M}_s = (\boldsymbol{A}_s^T \cdot \boldsymbol{P}_s \cdot \boldsymbol{A}_s)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0019 & 0{,}0013 & 0{,}0006 \\ 0{,}0013 & 0{,}0025 & 0{,}0013 \\ 0{,}0006 & 0{,}0013 & 0{,}0019 \end{pmatrix}.$$



2. Sekvenční vyrovnání.

Celkové vyrovnání všech měření:

Rovnice měření:

$h_1 = H_2 - Z_1$,
$h_2 = H_3 - H_2$.
$h_4 = H_4 - Z_1$,
$h_3 = H_3 - H_4$.

Pořadí neznámých:

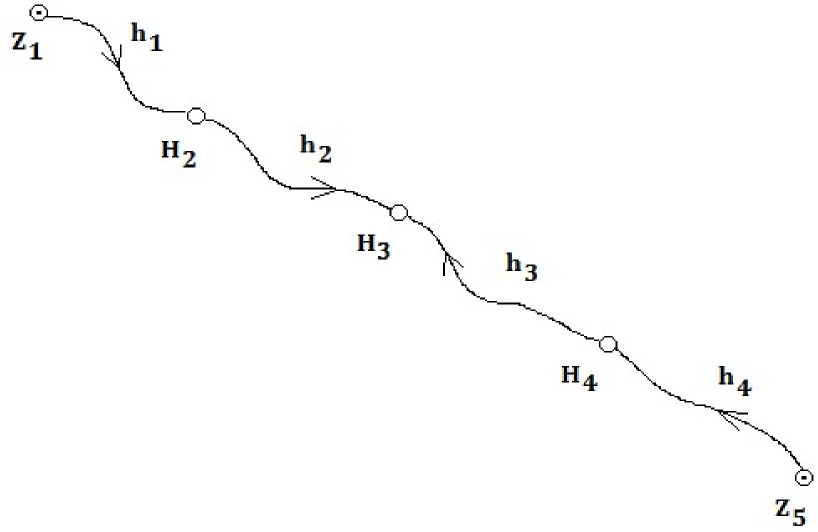
$$\boldsymbol{X}_c = \begin{pmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix}.$$

Jacobiho matice derivací:

$$\boldsymbol{A}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice vah:

$$\boldsymbol{P}_c = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_h^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 400 \end{pmatrix}.$$



2. Sekvenční vyrovnání.

Celkové vyrovnání všech měření:

Matice redukovaných měření:

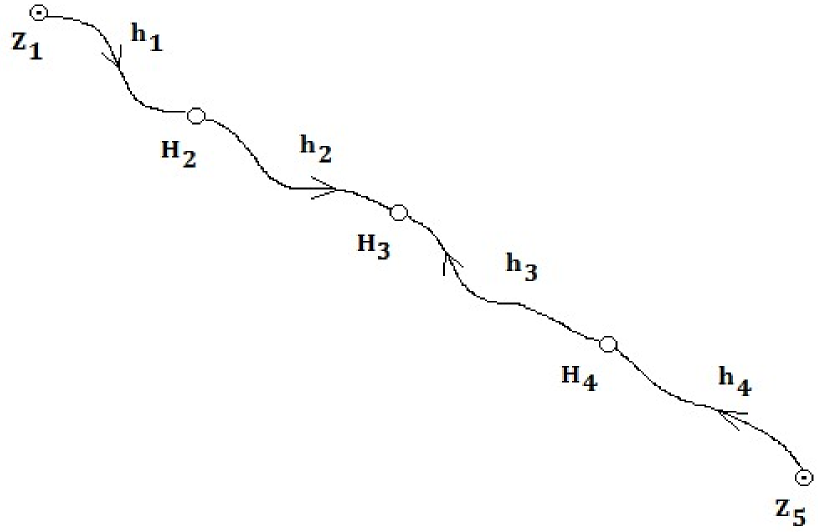
$$\boldsymbol{l'}_c = \begin{pmatrix} -Z_1 - h_1 \\ -h_2 \\ -Z_5 - h_4 \\ -h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110{,}1 \\ -10{,}1 \\ -129{,}9 \\ 10{,}1 \end{pmatrix}.$$

Vyrovnané hodnoty:

$$\begin{pmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}_c = -\left(\boldsymbol{A}_c{}^T \cdot \boldsymbol{P}_c \cdot \boldsymbol{A}_c\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_c{}^T \cdot \boldsymbol{P}_c \cdot \boldsymbol{l}'_c = \begin{pmatrix} 110{,}0 \\ 120{,}0 \\ 130{,}0 \end{pmatrix} m \,.$$

Kovarianční matice:

$$\boldsymbol{M}_c = (\boldsymbol{A}_c^T \cdot \boldsymbol{P}_c \cdot \boldsymbol{A}_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0019 & 0{,}0013 & 0{,}0006 \\ 0{,}0013 & 0{,}0025 & 0{,}0013 \\ 0{,}0006 & 0{,}0013 & 0{,}0019 \end{pmatrix}.$$



2. Sekvenční vyrovnání.

Celkové vyrovnání všech měření:

Matice redukovaných měření:

$$\boldsymbol{l'}_c = \begin{pmatrix} -Z_1 - h_1 \\ -h_2 \\ -Z_5 - h_4 \\ -h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -110{,}1 \\ -10{,}1 \\ -129{,}9 \\ 10{,}1 \end{pmatrix}.$$

Vyrovnané hodnoty:

$$\begin{pmatrix} H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}_c = -\left(\boldsymbol{A}_c{}^T \cdot \boldsymbol{P}_c \cdot \boldsymbol{A}_c\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{A}_c{}^T \cdot \boldsymbol{P}_c \cdot \boldsymbol{l}'_c = \begin{pmatrix} 110{,}0 \\ 120{,}0 \\ 130{,}0 \end{pmatrix} m\ .$$

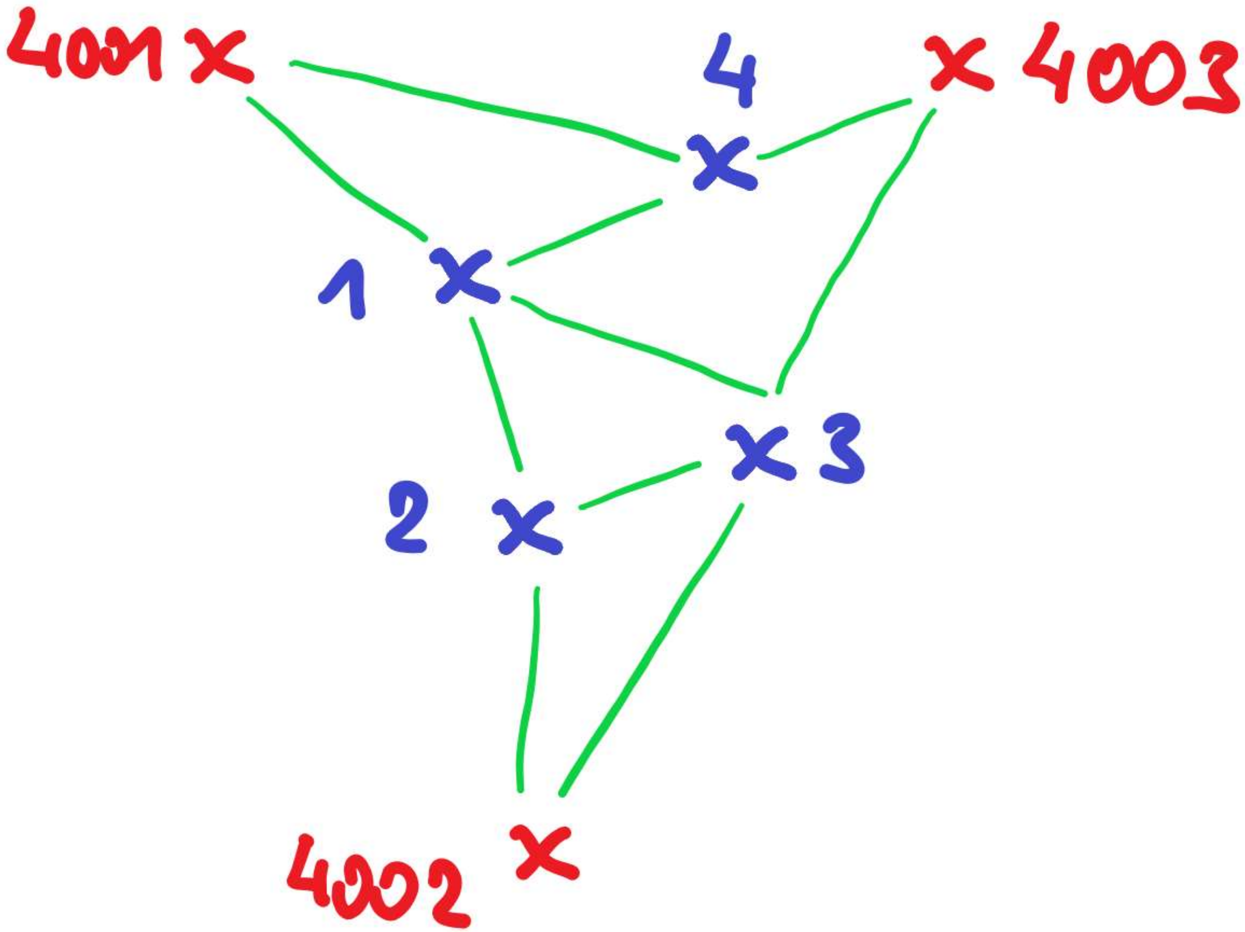
Kovarianční matice:

$$\boldsymbol{M}_c = (\boldsymbol{A}_c^T \cdot \boldsymbol{P}_c \cdot \boldsymbol{A}_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}0019 & 0{,}0013 & 0{,}0006 \\ 0{,}0013 & 0{,}0025 & 0{,}0013 \\ 0{,}0006 & 0{,}0013 & 0{,}0019 \end{pmatrix}.$$

2. Sekvenční vyrovnání.

Příklad konstrukce sekvenčního vyrovnání:

Geodetická síť



3. Chyby ve výchozích veličinách.

Úlohu vyrovnání jsme prozatím definovali tak, že existují pevné (konstantní) hodnoty (body, souřadnice, délky, úhly), od kterých jsme měřili nějaké hodnoty (tzv. měřené veličiny) s určitou přesností (směrodatnou odchylkou). Je zde velmi ostré rozhraní mezi danými (bezchybnými) veličinami a měřenými veličinami, kterým přisuzujeme ve vyrovnání opravy.

Praktické úlohy jen zřídkakdy vedou k podobné situaci. Většinou se stává, že i výchozí (dané) veličiny jsou určeny s jistou přesností - mají také určitou směrodatnou odchylku.

Exaktní řešení takového modelu dostaneme, když mezi vyrovnávané neznámé zahrneme i výchozí veličiny.

3. Chyby ve výchozích veličinách.

Příklad: Je zaměřena výšková síť se zadanou výškou A. Všechna měření uvažujeme stejně přesná.

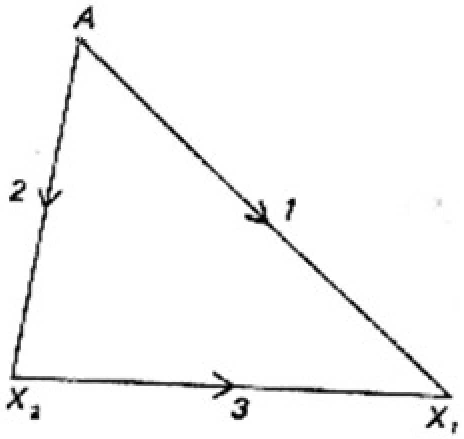
Klasické vyrovnání. Výšku A považujeme za bezchybnou.

Rovnice oprav:

$$\begin{array}{llllll} v_1 = & x_1 & & -A & -l_1 \\ v_2 = & & x_2 & -A & -l_2 \\ v_3 = & x_1 & -x_2 & & -l_3 \end{array}$$

váhová matice:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Exaktní společné vyrovnání. A bylo určeno z bodu K měřením l_A o váze $p_A = 1$.

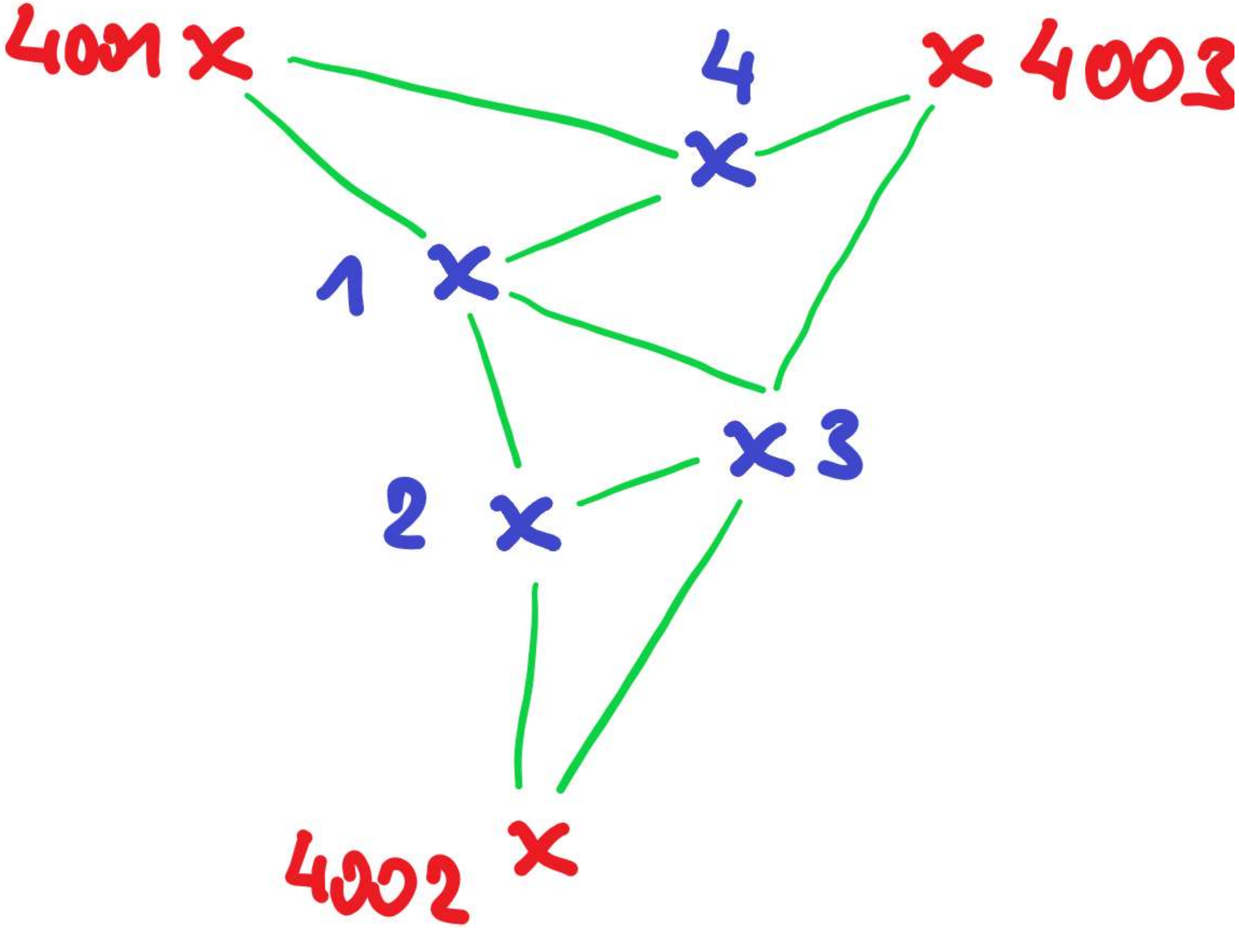
Rovnice oprav:

$$\begin{array}{lllllll} v_1 = & x_1 & & -A & & -l_1 \\ v_2 = & & x_2 & -A & & -l_2 \\ v_3 = & x_1 & -x_2 & & & -l_3 \\ v_A = & & & A & -K & -l_A \end{array}$$

váhová matice:

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Chyby ve výchozích veličinách.



☺ Konec ☺