Teorie chyb a vyrovnávací počet 2

Téma č. 9: **Harmonická analýza. Fourierova transformace.**

1. Harmonická funkce, Fourierovy řady.
2. Řešení pomocí MNČ, podmínky a možnosti.
3. Fourierova transformace.
4. Praktické řešení.
5. Možnosti využití.

1. Harmonická funkce, Fourierovy řady

Periodická funkce založená na funkci sinus (cosinus), nejjednodušší tvar:

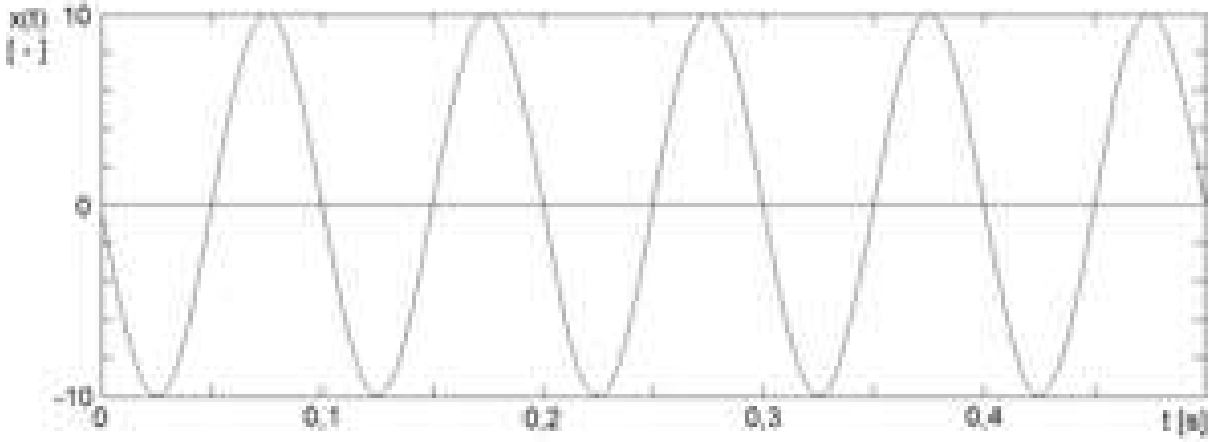
$$x(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

a ….. reálná kladná konstanta – amplituda

ω …. frekvence

φ_0 …. fázový posun

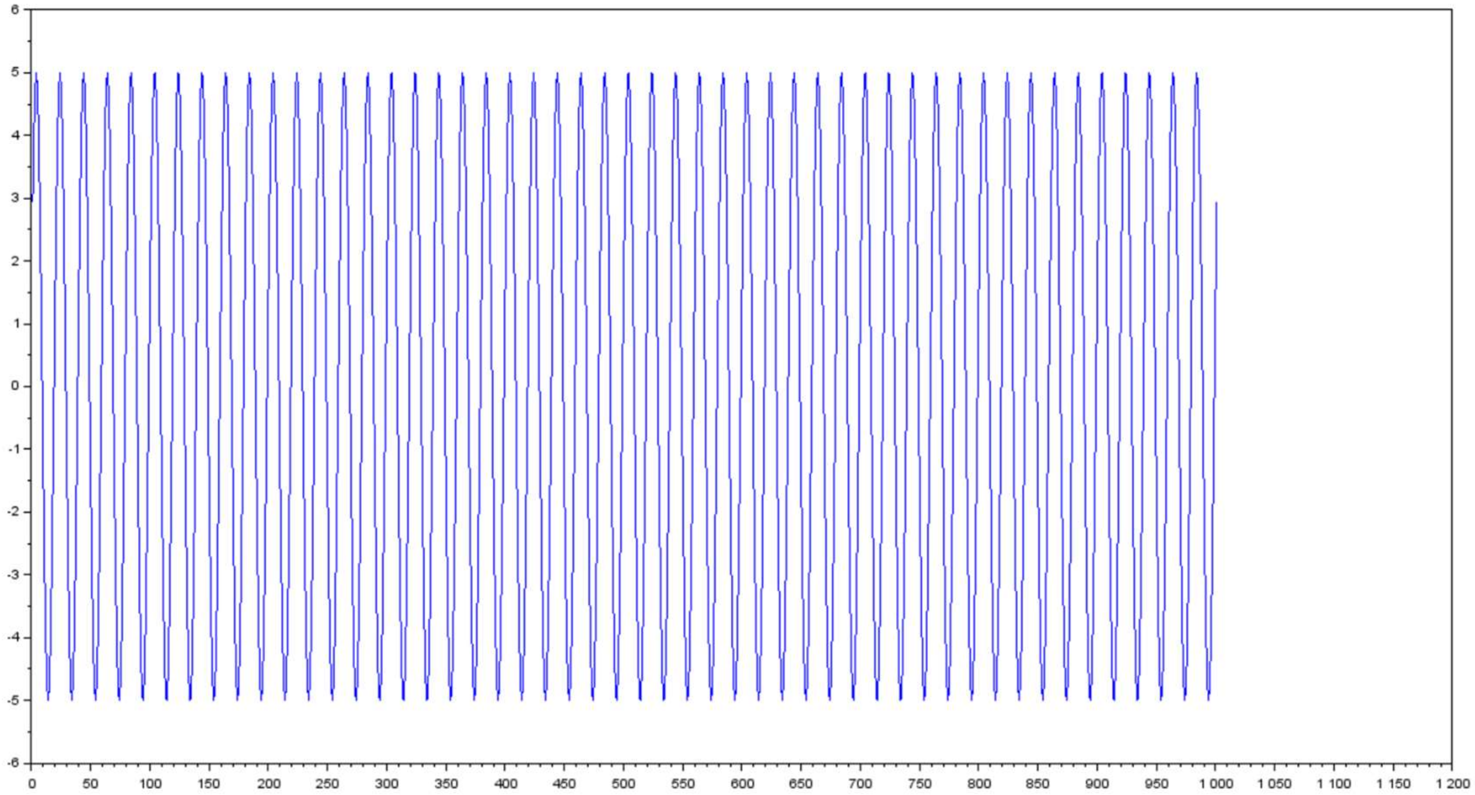
Funkci lze kombinovat s dalšími (lineární, kvadratická apod.)



1. Harmonická funkce, Fourierovy řady

Furierova řada je součtem více harmonických funkcí :

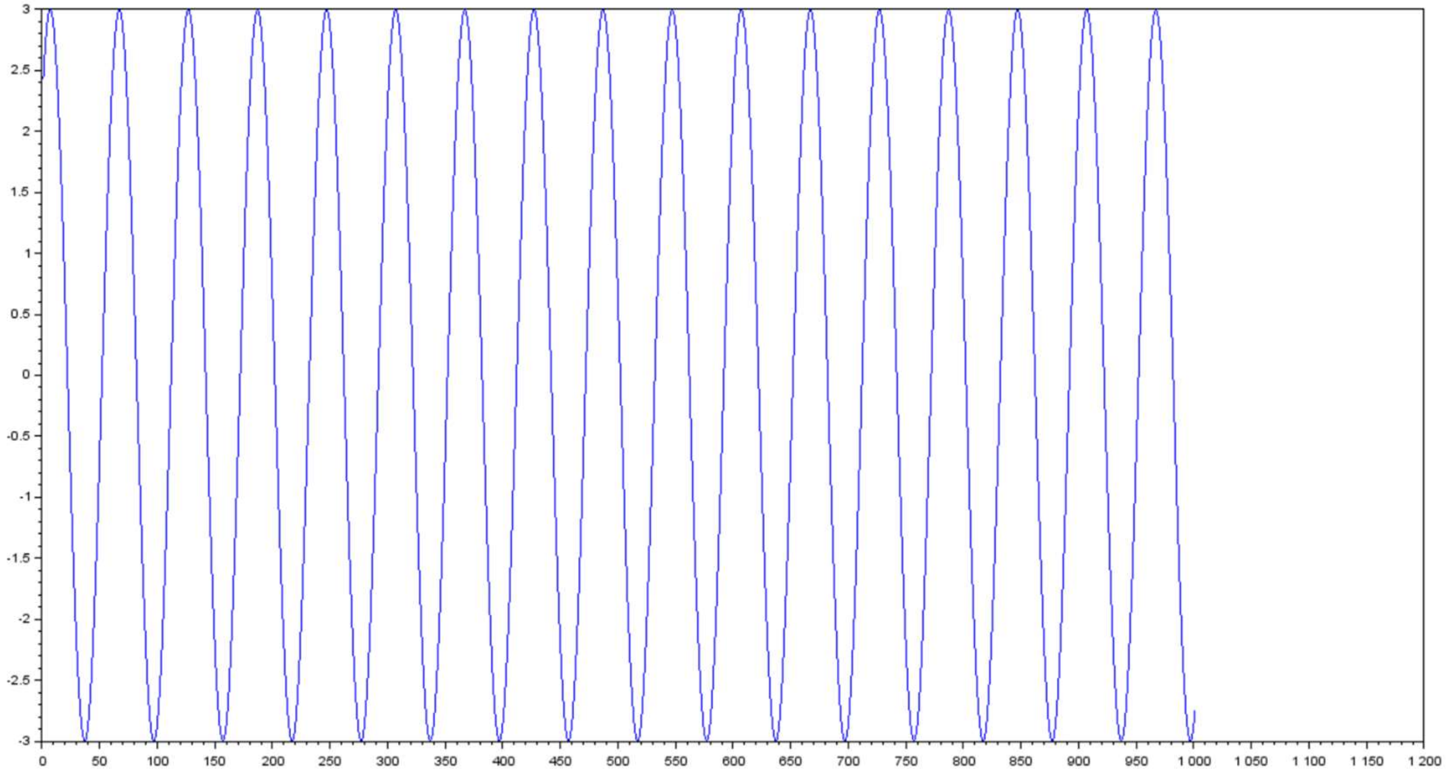
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_{0i})$$



1. Harmonická funkce, Fourierovy řady

Furierova řada je součtem více harmonických funkcí :

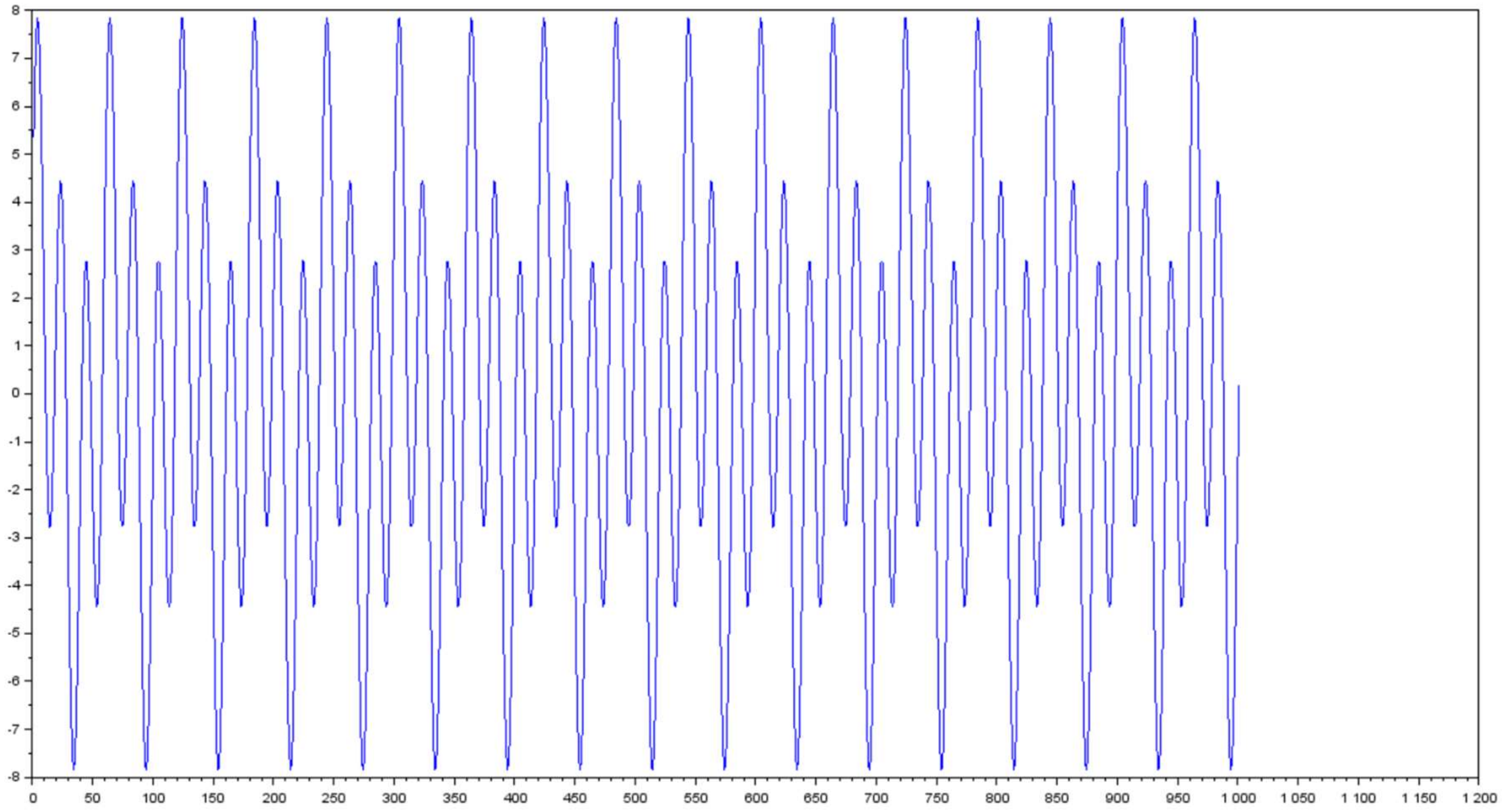
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_{0i})$$



1. Harmonická funkce, Fourierovy řady

Furierova řada je součtem více harmonických funkcí :

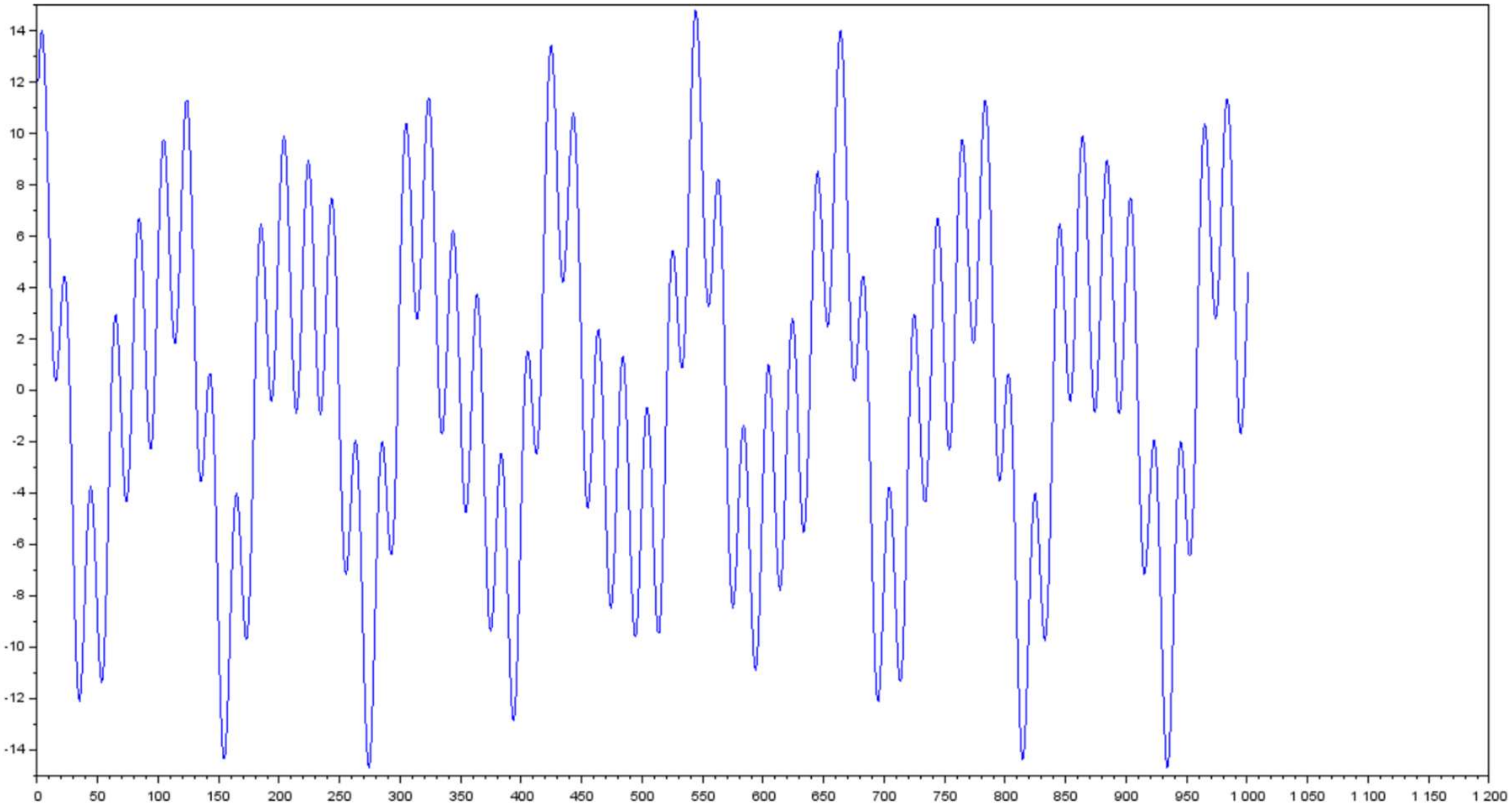
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_{0i})$$



1. Harmonická funkce, Fourierovy řady

Furierova řada je součtem více harmonických funkcí :

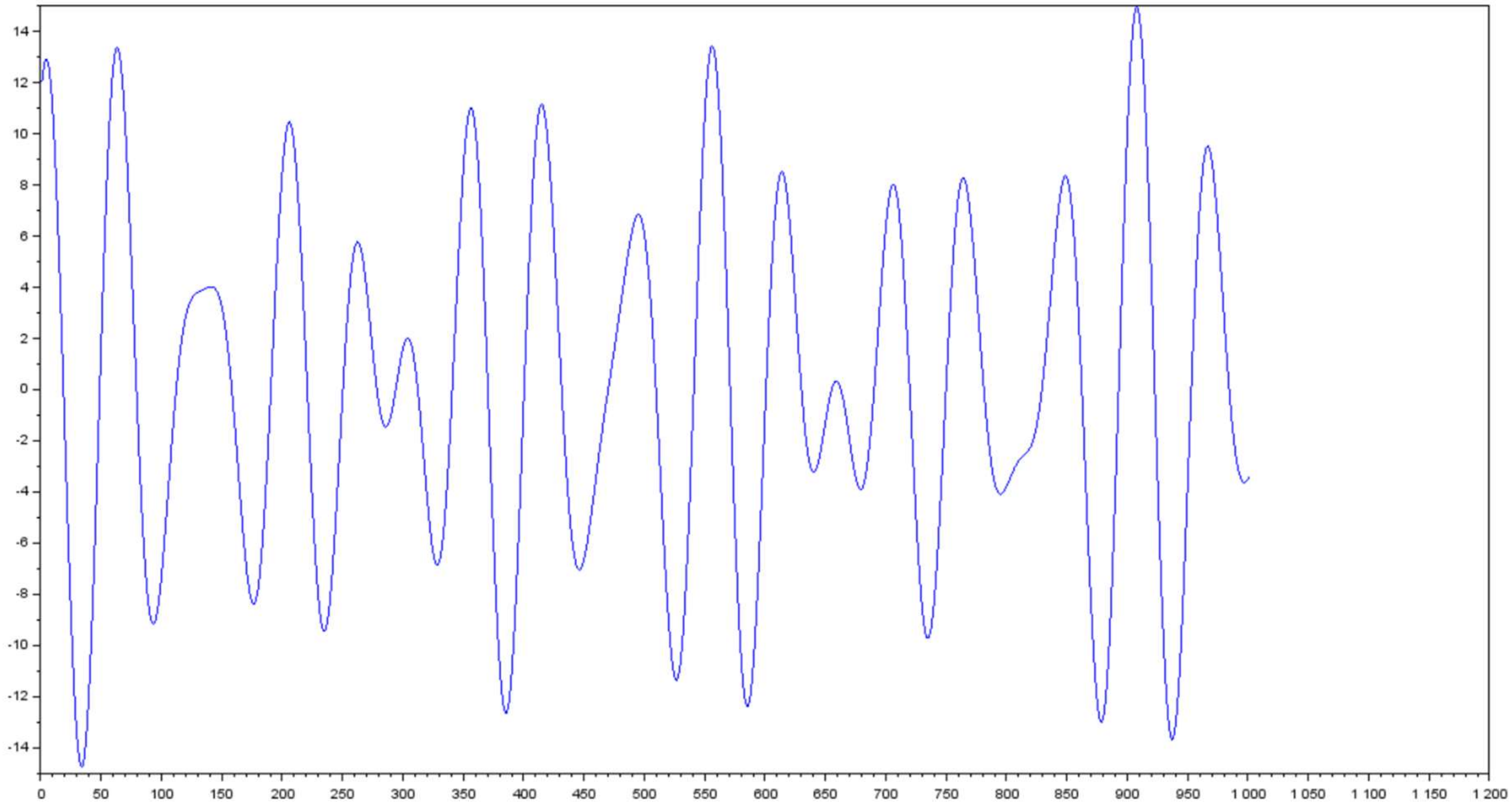
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_{0i})$$



1. Harmonická funkce, Fourierovy řady

Furierova řada je součtem více harmonických funkcí :

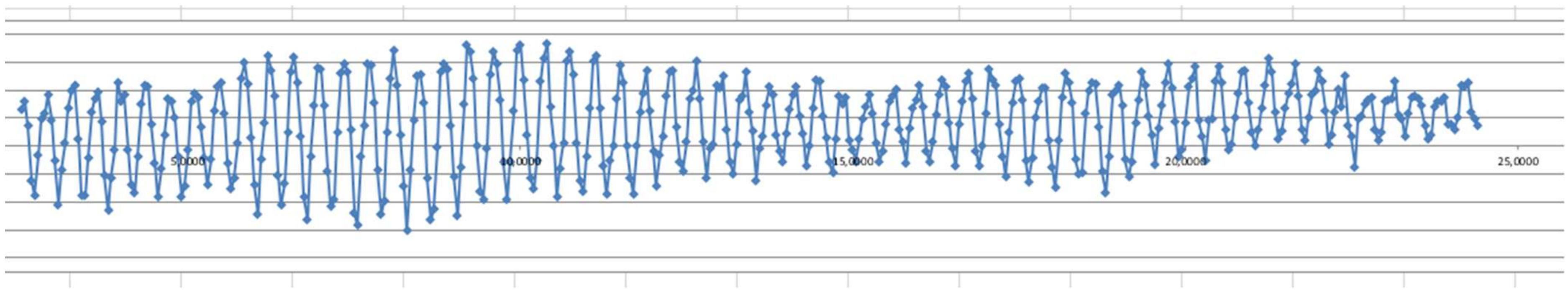
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_{0i})$$



1. Harmonická funkce, Fourierovy řady

Furierova řada je součtem více harmonických funkcí :

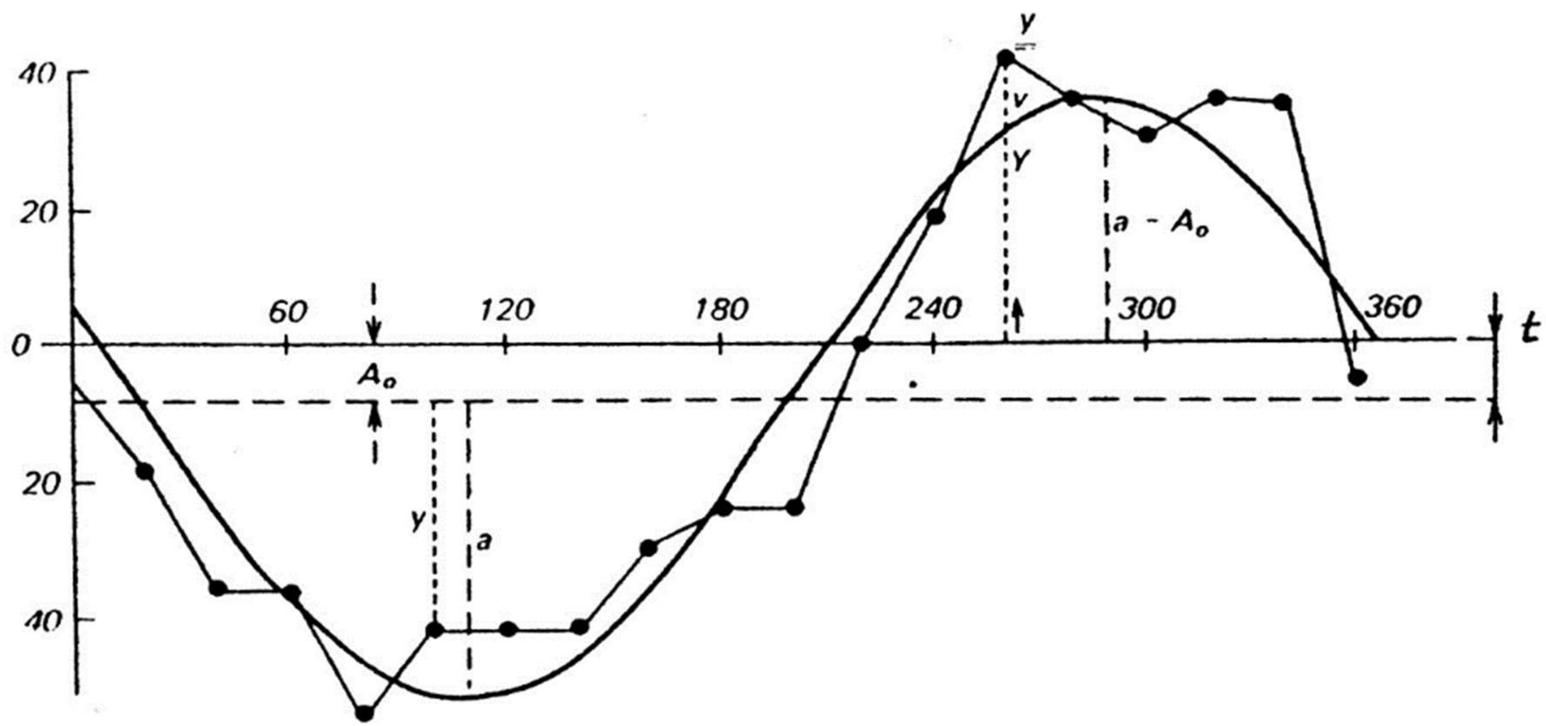
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sin(\omega_i \cdot t + \varphi_{0i})$$



2. Řešení pomocí MNČ, podmínky a možnosti.

Základní tvar harmonických funkcí :

$$x(t) = A + a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$



2. Řešení pomocí MNČ, podmínky a možnosti.

Základní tvar harmonických funkcí :

$$x(t) = A + a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Rovnice oprav:

2. Řešení pomocí MNČ, podmínky a možnosti.

Základní tvar harmonických funkcí :

$$x(t) = A + a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Rovnice oprav:

$$v = \begin{pmatrix} 1 & sin(\omega \cdot t + \varphi_0) & a \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \cdot t & a \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ a \\ \omega \\ \varphi_0 \end{pmatrix} - x$$

Možnosti výpočtu, nevýhody, více harmonických funkcí.

3. Fourierova transformace.

Fourierova transformace rozkládá funkci proměnné na jednotlivé frekvence. Lze pak vyjádřit vstupující funkci (diskrétní řadu bodů apod.) pomocí součtu jednotlivých harmonických funkcí, které se vzájemně liší amplitudou, fázovým posuvem a frekvencí (periodou).

Jedná se o velice komplexní oblast matematiky, často bývá vyjadřována v integrální formě pro spojitý signál:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx, \quad \textbf{(Eq.1)}$$

Existuje také transformace inverzní, kdy se s harmonických funkcí skládá zpět výsledná funkce.

3. Fourierova transformace.

Pro nás je zajímavější diskrétní Fourierova transformace (DFT), která převádí sadu ekvidistantně vzdálených dat na stejný počet komplexních hodnot frekvence.

$$\{\mathbf{x_n}\} := x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$$

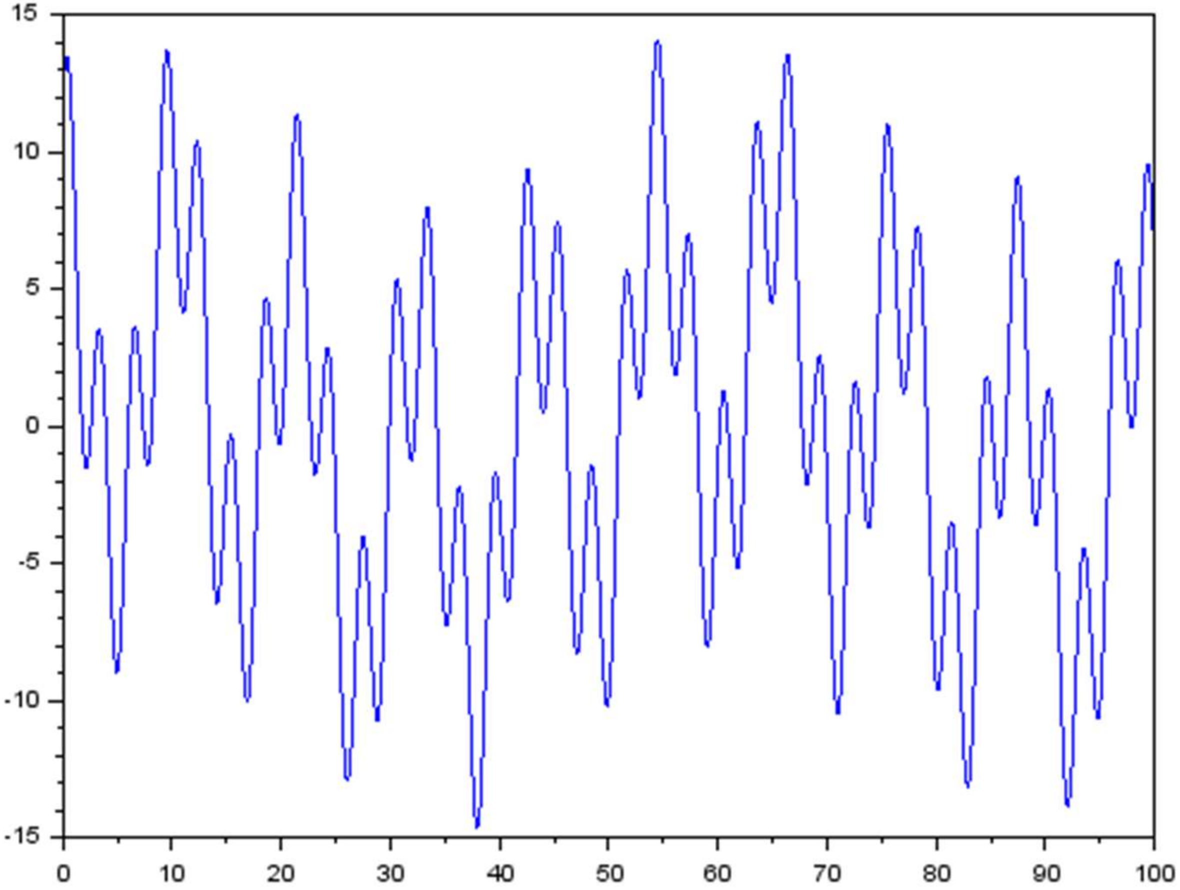
$$\{\mathbf{X_k}\} := X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}$$

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-\frac{i2\pi}{N}kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot [\cos(2\pi kn/N) - i \cdot \sin(2\pi kn/N)], \end{aligned} \qquad \textbf{(\textit{Eq.1})}$$

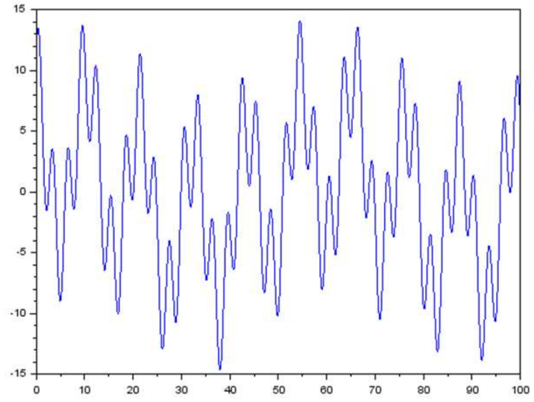
Jedná se o velice náročný výpočet, využívá se pro výpočet prakticky výlučně algoritmů FFT (Fast Fourier Transformation), která má náročnost místo n^2 náročnost n log n.

4. Praktické řešení.

Data:



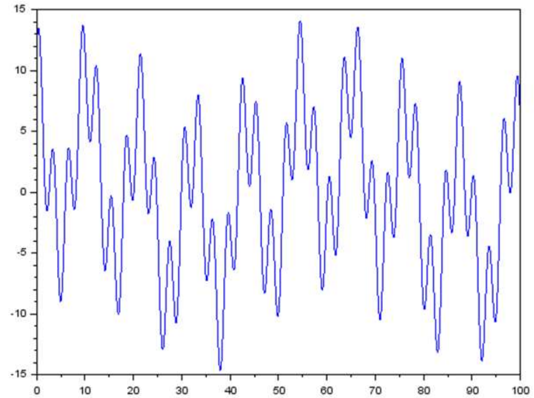
4. Praktické řešení.



Data:

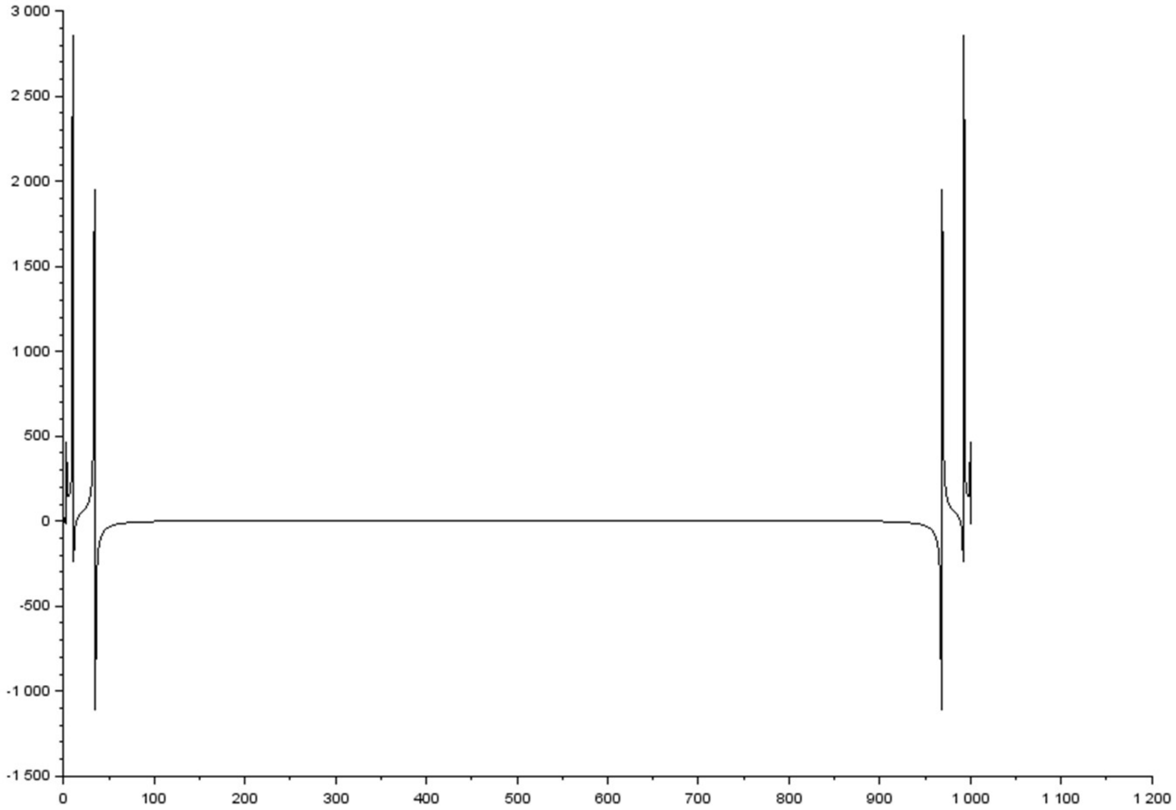
```
A = 5;
Ta = 3;
f0a = 0.2*%pi

B = 3;
Tb = 56;
f0b = 0.3*%pi

C = 7;
Tc = 11;
f0c = 0.6*%pi

jump = 0.1;

for i = 1:1001
 d(i) = (i-1)*jump;
 x(i) = A*sin(2*%pi()/Ta*d(i) +  f0a) + B*sin(2*%pi()/Tb*d(i)+  f0b) + C*sin(2*%pi()/Tc*d(i) + f0c);
end
```

4. Praktické řešení.



Výpočet:

```
27 y = fft(x');
```

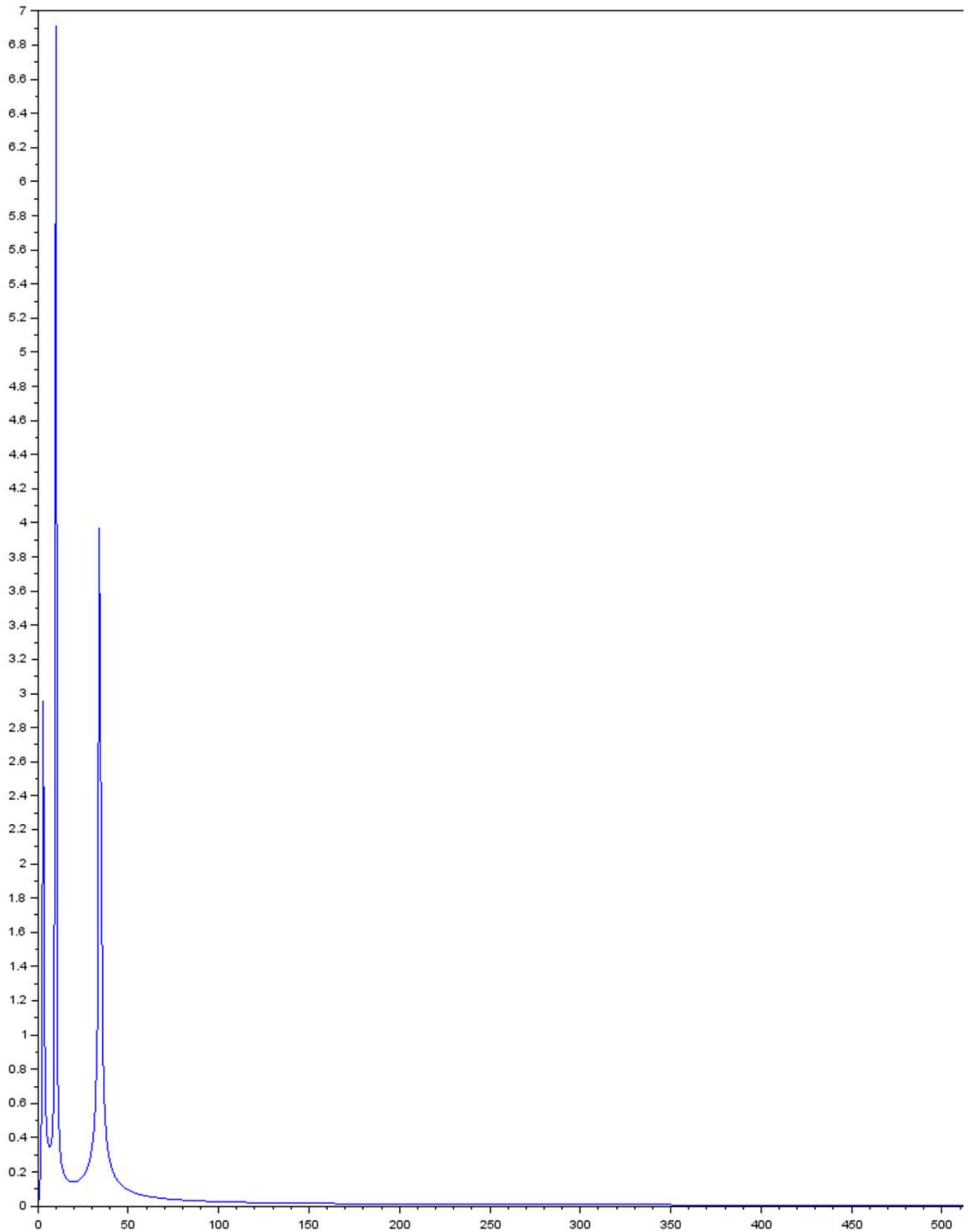


4. Praktické řešení.

Výpočet:

```
nFFT = length(d)
S = fft(x')/nFFT;
P2 = abs(S)*2;
```

```
f = (0:length(x)-1)*10/length(x);
```



5. Možnosti využití.

☺ Konec ☺