SYLABUS 2. a 3. PŘEDNÁŠKY Z INŽENÝRSKÉ GEODÉZIE

(Plánování přesnosti měření v IG)

3. ročník bakalářského studia
studijní program G
studijní obor G

doc. Ing. Jaromír Procházka, CSc.

říjen 2018

3. PLÁNOVÁNÍ PŘESNOSTI MĚŘENÍ V INŽENÝRSKÉ GEODÉZII

Realizace stavby vyžaduje úzkou součinnost geodeta se stavařem, a to především u činností, které jsou z hlediska geodetického nejnáročnější. Patří sem činnosti spojené s vytyčováním objektů, ověřovacím měřením geometrických parametrů stavby a měřením posunů a přetvoření staveb. U složitých a náročných staveb se zpracovává, jako samostatná část stavebního projektu, projekt geodetických prací. V tomto projektu se řeší geodetické činnosti po stránce technické, organizační, ekonomické, popř. právní.
Technické řešení obsahuje kromě řady technických údajů především technologii, tj. postup měření. Důležitou součástí je rozbor přesnosti navržené metody. Rozborem se zdůvodňuje volba měřického postupu, stanoví se požadavky na kvalitu přístrojů a pomůcek, určí se počet (opakování) měření, způsob kontroly apod. tak, aby byla splněna požadovaná (projektovaná) přesnost měření. Dále se stanoví mezní hodnoty pro hodnocení dosažené přesnosti měřených veličin a výsledků vytyčení, popř. zaměření.
Při rozborech přesnosti se vychází z ***požadované (projektované) přesnosti*** vytyčovaného (měřeného) geometrického parametru, která je dána:

a) ***stavební tolerancí popř. mezní odchylkou g.p.*** (hodnoty jsou uvedeny v projektu),
b) ***mezní vytyčovací odchylkou*** (hodnoty jsou uvedeny v [10], [11]).

Protože přesnost měření je charakterizována směrodatnými odchylkami je nutné znát (stanovit) vztahy mezi tolerancí, mezní odchylkou g.p., mezní vytyčovací odchylkou (mezní odchylkou měření) a směrodatnou odchylkou vytyčení (měření).

3.1 VZTAH MEZI TOLERANCÍ A MEZNÍ VYTYČOVACÍ ODCHYLKOU

Pro další úvahy se považují dolní a horní odchylka g.p. za stejné, protože se podle [10] vytyčuje střed tolerančního intervalu. Potom platí:

$$Tx = -2 \cdot \delta x_{Tinf} = 2 \cdot \delta x_{Tsup} = 2 \cdot \delta x_{TMS} \ , \tag{3.1}$$

kde $\boldsymbol{\delta x_{TMS}}$ znamená požadovanou (vyznačeno indexem T) mezní symetrickou odchylku geometrického parametru.

Vztah mezi požadovanou mezní odchylkou g.p. a požadovanou mezní vytyčovací odchylkou nebo mezní odchylkou měření je obecně velmi diskutován. Platí požadavek, aby přesnost geodetického měření neovlivnila přesnost stavby, pokud je to reálné.
Při stanovení koeficientu mezi oběma požadovanými mezními odchylkami se vychází ze vztahu, který zahrnuje jednotlivé vlivy, podílející se na velikosti požadované mezní odchylky g.p.. Tedy například pro montované stavby :

$$\delta x_{TMS}^2 = \delta x_{TMD}^2 + \delta x_{TMM}^2 + \delta x_{TMv}^2 \tag{3.2}$$

kde $\boldsymbol{\delta x_{TMD}}$ je mezní odchylka rozměru stavebního dílce,
$\boldsymbol{\delta x_{TMM}}$ - mezní odchylka montážní,
$\boldsymbol{\delta x_{TMv}}$ - mezní vytyčovací odchylka.

Při uplatnění požadavku, aby přesnost geodetického měření neovlivnila přesnost stavby, se volí kvadrát požadované mezní vytyčovací odchylky jako desetina (tj. o řád přesnější) kvadrátu stavební odchylky:

$$\delta x_{TMD}^2 + \delta x_{TMM}^2 = 10 \cdot \delta x_{TMv}^2$$

Potom po dosazení do rovnice (3.2) bude:

$$\delta x_{TMS}^2 = 11 \cdot \delta x_{TMv}^2 \ , \ \delta x_{TMS} \approx 3{,}3 \cdot \delta x_{TMv} \ ,$$

nebo

$$\delta x_{TMv} = 0{,}30 \cdot \delta x_{TMS} = 0{,}15 \cdot Tx \tag{3.3}$$

Ve výjimečných případech, kdy dosažení požadované přesnosti je na hranici přesnosti geodetických metod, se používá i jiný koeficient. Neměl by však překročit hranici, kdy podíl stavební a geodetické části odchylky je stejný. Potom platí:

$$\delta x_{TMD}^2 + \delta x_{TMM}^2 = \delta x_{TMv}^2$$

a po dosazení do rovnice (3.2) bude:

$$\delta x_{TMS}^2 = 2 \cdot \delta x_{TMv}^2 \ ,$$

nebo $$\delta x_{TMv} \approx 0{,}7 \cdot \delta x_{TMS} = 0{,}35 \cdot Tx. \qquad (3.4)$$

V [6] se předepisuje vztah:

$$\delta x_{TMv} = 0{,}2 \cdot Tx = Tx/5, \qquad (3.5)$$

který odpovídá požadavku, aby geodetické měření prakticky neovlivnilo přesnost stavby.

3.2 VZTAH MEZI MEZNÍ A SMĚRODATNOU ODCHYLKOU

Směrodatná odchylka $\boldsymbol{\sigma}$ se vypočte z mezní odchylky $\boldsymbol{\delta x_{TM}}$ pomocí koeficientu spolehlivosti $\boldsymbol{u_p}$

$$\sigma = \delta x_M / u_p \quad \text{nebo} \quad \sigma_T = \delta x_{TM} / u_p \qquad (3.6)$$

Velikost koeficientu spolehlivosti $\boldsymbol{u_p}$ se volí podle podmínek daných v [10]:

- $\boldsymbol{u_p} = 2$ - používá se u jednoduchých, snadno kontrolovatelných měření (vytyčení), u nichž lze vliv systematických odchylek vzhledem k jejich velikosti zanedbat,
- $\boldsymbol{u_p} = 2{,}5$ - používá se u složitějších měření (vytyčení), která lze obtížněji kontrolovat,
- $\boldsymbol{u_p} = 3$ - používá se za nepříznivých podmínek a při obtížném vylučování systematických odchylek,
- $\boldsymbol{u_p} > 3$ - používá se zcela výjimečně u důležitých a ekonomicky velmi závažných měření (vytyčení).

Poznámka: Při měření (vytyčování) v měřických dvojicích se stejným postupem a za stejných podmínek měření se systematická odchylka neprojeví v hodnocení výsledku (odst. 3.4.3) Pokud se systematická odchylka zahrnuje do koeficientu spolehlivosti (nelze ji odstranit měřickým postupem ani početně) potom se při apriorním rozboru (odst. 3.4.1) volí např. koeficient $\boldsymbol{u_p} = 3$ a při aposteriorním rozboru (odst. 3.4.3) např. $\boldsymbol{u_p} = 2$.

Jednorozměrné a dvojrozměrné odchylky

Přesnost jednorozměrných veličin je jednoznačně charakterizována směrodatnou odchylkou $\boldsymbol{\sigma}$.

Přesnost dvojrozměrných veličin (např. v poloze bodu) je nejvhodněji charakterizována pomocí elipsy chyb, která je dána velikostí hlavní a vedlejší poloosy a směrníkem hlavní poloosy. V praxi se často používá zjednodušení, tj. směrodatná odchylka $\boldsymbol{\sigma_x}$ a $\boldsymbol{\sigma_y}$ v souřadnicích $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, směrodatná souřadnicová odchylka $\boldsymbol{\sigma_{xy}}$, popř. směrodatná polohová odchylka $\boldsymbol{\sigma_p}$. Vzájemné vztahy jsou uvedeny v následujících vzorcích:

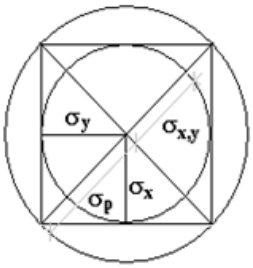
$$\sigma_{x,y} = \sqrt{0{,}5 \cdot \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2\right)} \ , \qquad (3.7)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \ . \qquad (3.8)$$

Rovnice (3.7), (3.8) nahrazují elipsu chyb kružnicí. Je-li $\boldsymbol{\sigma_x} = \boldsymbol{\sigma_y}$, neznamená to ještě, že se jedná o kružnici chyb (podmínka nutná, nikoli však postačující).

Pravděpodobnost výskytu odchylek uvnitř obrazce (obr. 3.1) je přibližně:

- pro směrodatnou polohovou odchylku σ_p 63 %,
- pro směrodatnou souřadnicovou odchylku σ_{xy} 39 %,
- pro čtverec 47 %.



Obr.3.1 Směrodatná souřadnicová a polohová odchylka

Tvar elipsy chyb ovlivňuje pravděpodobnost výskytu odchylek. Extrémy jsou kružnice a úsečka. Pro stejné procento pravděpodobnosti platí různé koeficienty spolehlivosti (tab. 3.1) u jednorozměrných a dvojrozměrných směrodatných odchylek. Pro stanovení stejné mezní odchylky v poloze (s odpovídající pravděpodobností), při dané směrodatné odchylce σ_x a σ_y platí pro směrodatnou polohovou i souřadnicovou odchylku různý koeficient spolehlivosti (tab. 3.1).

Tab. 3.1 Koeficienty spolehlivosti pro jedno a dvojrozměrné odchylky

Jednorozměrné odchylky		Dvojrozměrné odchylky			
		σ_{Txy}		σ_p	
u_p	P %	u_p	P %	u_p	P %
1,0	68,3	1,0	39,3	1,0	63,2
2,0	95,4	2,0	86,5	2,0	98,1
2,5	98,8	2,5	95,6	2,5	99,8
3,0	99,7	3,0	98,9	3,0	100,0
		3,5	99,8		

3.3 KONTROLA VYTYČENÍ (MĚŘENÍ)

Každé vytyčení (měření) v inženýrské geodézii musí být kontrolováno (100% kontrola), zatím co při kontrole stavební výroby se provádí pouze výběrová kontrola (např. při přejímce stavebních dílců). Kontrolu vytyčení (měření) nelze zaměňovat s kontrolou měřením (ověřovací měření), kdy se kontroluje správnost geometrického parametru (např. tvaru a rozměru objektu) ani s kontrolním měřením (viz poznámka na konci kapitoly).
Kontrola vytyčení (měření) je součástí měření a zahrnuje se do výsledku, kterým je zpravidla průměr. Kontrola se nejčastěji provádí opakovaným měřením (druhým vytyčením) s přibližně stejnou přesností nebo použitím kontrolních prvků [10]:

- opakovaným vytyčením stejným postupem, za stejných podmínek a přesnosti. Tento postup je v praxi nejčastěji používaný. Nezjistí se však působení systematických odchylek,
- opakovaným vytyčením nezávislým postupem, kdy se mění podmínky a pomůcky (např. kontrola ortogonálně vytyčeného bodu metodou polární). Měl by se zmírnit vliv systematické odchylky. Přesnost obou postupů je zhruba stejná,
- použitím kontrolních geometrických prvků, např. body vytyčené ortogonální metodou se kontrolují oměrnými mírami. Při tomto postupu se musí zajistit úplnost kontroly, např. zaměřením dalších geometrických prvků.

Poznámka:
Pojem „kontrola vytyčení“ nezaměňovat s termínem „kontrolní měření“, které je definováno v [10] jako „nezávislé měření pro kontrolu správnosti a přesnosti předcházejících měření, prováděné stavebníkem“. V tomto případě se kontrolní měření provádí opakovaným vytyčením nezávislým postupem s podstatně vyšší přesností, tj. 2,5 krát vyšší přesností oproti původnímu vytyčení. Tato kontrola se používá výjimečně při sporech nebo nedodržení mezních odchylek.

3.4 ROZBOR PŘESNOSTI

Předpokladem rozboru přesnosti je zadání mezní odchylky vytyčení (měření). Pro některé běžné práce existují technologické postupy, kde se uvádějí podmínky, za kterých jsou splněny požadavky na přesnost. V tom případě se rozbory přesnosti nedělají (např. přesná nivelace).

Rozbor přesnosti se skládá ze tří částí podle průběhu vytyčení (měření):

- rozbor přesnosti před měřením,
- rozbor přesnosti při měření,
- rozbor přesnosti po měření.

Jak již bylo naznačeno výše, je při rozborech přesnosti nutno rozlišit, zda se v řešené úloze jedná o vytyčování či zaměřování. Při vytyčování se poloha vytyčovaného bodu teprve hledá, zatímco při zaměřování se jedná o měření mezi dvěma danými body, což je logicky přesnější. Proto při vyšších požadavcích na přesnost vytyčení vytyčujeme polohu (výšku) bodu nejprve přibližně, vhodně stabilizujeme (tak, abychom na ní mohli realizovat posuny do „přesné“ polohy), zaměříme s požadovanou přesností polohu přibližně vytyčeného bodu (tím jsme převedli vytyčení na zaměření) a poté vypočteme a realizujeme posuny. Oproti zaměření je nutno uvážit ještě chyby při realizaci posunů $\boldsymbol{\sigma_r}$, jejichž velikost bude závislá na technologickém postupu vytyčování a bude zahrnovat např. chybu v centraci cílové značky (popř. odrazného hranolu) nad přibližným bodem (není-li již zahrnuta ve směrodatné odchylce měřeného vodorovného úhlu) a chybu ve vynesení posunů na stabilizaci (odst.b).

3.4.1 Rozbor přesnosti před měřením

a) Zaměření

Rozbor přesnosti před měřením spočívá v tom, že ke stanovené požadované přesnosti (k mezní odchylce $\boldsymbol{\delta_{TM}}$) se zvolí měřický postup (jehož přesnost je charakterizována směrodatnou odchylkou $\boldsymbol{\sigma}$), který splňuje požadovanou směrodatnou odchylku $\boldsymbol{\sigma_T}$, resp. při zahrnutí druhého zaměření do výsledku $\boldsymbol{\sigma_{To}}$.

$$\sigma_T = \delta_{TM}/u_p \ . \tag{3.9}$$

Protože každé měření je kontrolováno (zpravidla se měří dvakrát a výsledkem je při dodržení požadované přesnosti průměr dvojice měření), bude pro jedno měření platit vztah:

$$\sigma_{To} = \sigma_T \cdot \sqrt{2} \tag{3.10a}$$

Pokud by se ve výjimečných případech uvažovalo více měření $\boldsymbol{n}$, bude obecně platit:

$$\sigma_{To} = \sigma_T \cdot \sqrt{n}$$

Potom $\sigma_{To} = \sqrt{2} \cdot \delta_{TM}/u_p$ nebo $\sigma_{To} = \sqrt{n} \cdot \delta_{TM}/u_p$.

Dále se volí přístroje odpovídající přesnosti, a pokud deklarovaná přesnost měřické jednotky požadované přesnosti měření nevyhovuje, volí se přístroj vyšší přesnosti (pokud je k dispozici) nebo se zvyšuje počet opakování, je-li to únosné (např. měření úhlů ve více skupinách), který měřené veličiny zpřesňuje tak, aby požadované přesnosti vyhovovaly. Ze vzorce pro směrodatnou odchylku $\boldsymbol{\sigma}$ zvolené metody se stanoví požadované směrodatné odchylky přímo měřených veličin $\boldsymbol{\sigma_{Tti}}$ a při znalosti základní směrodatné odchylky jednotky přímo měřené veličiny $\boldsymbol{\sigma_{to}}$ se vypočte počet opakování ze vztahu (viz konkrétní úlohy ve cvičení z INGE):

$$n_{ti} = \frac{\sigma_{to}^2}{\sigma_{Tti}^2} \ .$$

b) Vytyčení

Rozbor přesnosti před měřením pro vytyčování s vyšší přesností vychází opět ze stanovené požadované přesnosti (z mezní vytyčovací odchylky δ_{TMv}). Je tedy nutno uvážit přesnost realizace posunů σ_r , o kterou se musí snížit hodnota požadované směrodatné odchylky vytyčení σ_{To}, abychom určili hodnotu požadované směrodatné odchylky měření σ_{Tm} , a zachovali si tak prostor pro vliv chyb z realizace:

$$\sigma_{Tm} = \sqrt{\sigma_{To}^2 - \sigma_r^2} \qquad (3.10b)$$

Další postup je obdobný jako při zaměřování s tím, že pro určení počtu opakování se použije směrodatné odchylky σ_{Tm} .

Pro běžně užívané postupy jsou vzorce pro směrodatnou odchylku σ volené metody známy. U speciálních postupů je nutné tyto vzorce odvodit použitím zákona hromadění směrodatných odchylek. Obecně platí:

$$\sigma = f\left(t_i; \sigma_{t_i}\right) , \qquad (3.11)$$

kde: t_i je měřená veličina (např. úhel, délka),
σ_{ti} - směrodatná odchylka měřené veličiny.

Velikost σ_{ti} je možno měnit podmínkami při měření např. volbou přístrojů a pomůcek, počtem opakování apod.

Při volbě metody mohou nastat tři případy:

- $\sigma_{To} > \sigma_o$, metoda je přesnější, (3.12)
- $\sigma_{To} = \sigma_o$, metoda je optimální, (3.13)
- $\sigma_{To} < \sigma_o$, metoda je nevhodná. (3.14)

Pokud podmínka v nerovnosti (3.12) je výrazná, je někdy teoreticky možné při vytyčování vynechat realizaci výsledku kontroly vytyčení (u měřické dvojice). Tento případ nastane tehdy, když podle obr. 3.2 bude platit:

$$\Delta_z/2 + u_p \cdot \sigma_o/\sqrt{2} = \delta_{TM} \qquad (3.15)$$

Z toho

$$\Delta_z = 2 * \left(\delta_{TM} - u_p \cdot \sigma_o/\sqrt{2}\right) \qquad (3.16)$$

kde Δ_z je rozdíl mezi vytyčením a kontrolou vytyčení, který lze zanedbat, aniž by tím bylo ohroženo dodržení požadované přesnosti. Nazývá se zanedbatelný rozdíl.

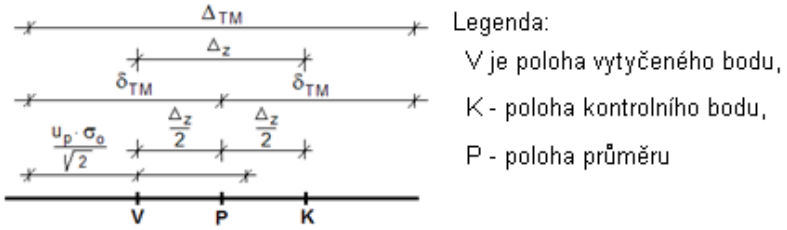
Pokud bude platit, že:

$$\Delta_z/2 = u_p \cdot \sigma_o/\sqrt{2} \qquad (3.17)$$

a po úpravě

$$\sigma_o = \delta_{TM}/\left(u_p \cdot \sqrt{2}\right) , \qquad (3.18)$$

bude dosažený rozdíl Δ mezi vytyčením a kontrolou možno zanedbat (za předpokladu dodržení přesnosti měření). Mezní rozdíl Δ_{xM} pak nelze teoreticky překročit.



Obr.3.2 Zanedbatelný rozdíl

Jak již bylo dříve uvedeno, úvahy o zanedbatelném rozdílu umožňují zjednodušení vytyčení tím, že při dodržení určitých podmínek odpadá realizace výsledku kontroly vytyčení (posunu do průměrné polohy). Tím se rozšiřují možnosti testování vhodnosti navrhované metody z hlediska dodržení požadované přesnosti (tab. 3.2).

Tab. 3.2 Pásma pro testování volené metody z hlediska vhodnosti

Směrodatná odchylka	Koeficient spolehlivosti		Poznámka
	$u_p = 2,0$	$u_p = 2,5$	
$\sigma_o \le \sigma_{To}/2$	$0,35.\ \delta_{TM}$	$0,28.\ \delta_{TM}$	posun se nerealizuje
$\sigma_o \in (\sigma_{To}/2 \div \sigma_{To})$	$(0,35 \div 0,70).\delta_{TM}$	$(0,28 \div 0,56).\ \delta_{TM}$	nerealizuje se pro $\Delta < \Delta_z$
$\sigma_o = \sigma_{To}$	$0,70.\ \delta_{TM}$	$0,56.\ \delta_{TM}$	vždy průměr $\Delta_z = 0$
$\sigma_o > \sigma_{To}$	$> 0,70.\ \delta_{TM}$	$> 0,56.\ \delta_{TM}$	přesnost nesplněna

Rozbory přesnosti je vhodné provádět tak, aby byla splněna podmínka $\boldsymbol{\sigma_o = \sigma_{To}/2}$ nebo $\boldsymbol{\sigma_o = \sigma_{To}}$, popř. aby byla dosažena hodnota mírně lepší.

Směrodatná odchylka metody $\boldsymbol{\sigma_o}$ se odvozuje pomocí zákona hromadění směrodatných odchylek. Tento zákon platí za podmínek:

- jednotlivá měření a jejich náhodné odchylky musí být vzájemně nezávislé,
- pravděpodobnost (četnost) odchylek se musí řídit sudým zákonem,
- hodnoty jednotlivých parciálních derivací musí být prakticky konstantní, změní-li se t_i o hodnotu $\boldsymbol{\sigma_{ti}}$,
- součiny $\boldsymbol{\partial f/\partial t_i}$ musí mít stejný fyzikální rozměr (musí být vyjádřeny ve stejných fyzikálních jednotkách).

Postup při aplikaci zákona hromadění směrodatných odchylek
Výchozí rovnice pro jednorozměrné odchylky je: $y = f(t_i, \dots\dots, t_n)$,
kde $\boldsymbol{t_i}$ je měřená veličina.

Rovnice se linearizuje parciálním diferencováním podle jednotlivých proměnných (Taylorův rozvoj - první člen):

$$dy = \partial f/\partial t_1(t_o) \cdot dt_1 + \dots\dots + \partial f/\partial t_n(t_o) \cdot dt_n$$

Diferenciály se nahradí náhodnými odchylkami:

$$\varepsilon_y = a_1 \cdot \varepsilon_{t_1} + \dots\dots + a_n \cdot \varepsilon_{t_n}\ , \quad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot \varepsilon_{t_i}\right).$$

Po přechodu na směrodatné odchylky je: $\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot \sigma_{t_i}\right)^2$.
Maticový zápis: $\boldsymbol{\varepsilon_y = A \cdot \varepsilon_t}$

kde $\boldsymbol{A}$ je Jacobiho matice (vektor), $\boldsymbol{A = (a_1, \dots, a_n)}$,
$\boldsymbol{\varepsilon_t}$ - vektor náhodných odchylek, $\boldsymbol{\varepsilon_t = (\varepsilon_{t1}, \dots\dots, \varepsilon_{tn})^T}$.

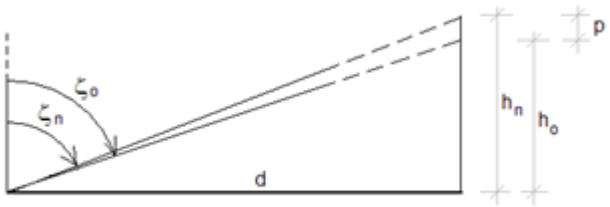
Vztah pro směrodatnou odchylku $\boldsymbol{\sigma_y}$: $\boldsymbol{\sigma_y^2 = A \cdot M_t \cdot A^T}$,
kde $\boldsymbol{M_t}$ je diagonální matice čtverců směrodatných odchylek měřených veličin:

$$\boldsymbol{M_t} = \begin{matrix} \boldsymbol{\sigma_{t1}^2} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{..} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\sigma_{tn}^2} \end{matrix}$$

Příklad řešení rozboru přesnosti před měřením:

Určení svislých posunů trigonometrickým měřením výšek při nucené centraci

- Měřenými veličinami jsou vodorovná délka záměry $\boldsymbol{d_0}$ (*délka mezi etapami se nemění*) a zenitový úhel v nultě $\boldsymbol{\zeta_0}$ a n-té etapě $\boldsymbol{\zeta_n}$.
- Je dána požadovaná mezní odchylka měřeného posunu $\boldsymbol{\delta_{TM}}$.
- Rozborem se má určit přesnost délkového a uhlového měření, to znamená počet jejich opakování, tedy $\boldsymbol{n_d}$ a $\boldsymbol{n_\zeta}$.
- Je známa předpokládaná velikost posunu $\boldsymbol{p}$, převýšení $\boldsymbol{h}$, vodorovná délka $\boldsymbol{d}$ a směrodatná odchylka jednou měřené délky $\boldsymbol{\sigma_{do}}$ a zenitového úhlu $\boldsymbol{\sigma_{\zeta o}}$.
- Převýšení se měří pro kontrolu dvakrát. Výsledkem je průměr.



Obr.3.3 Určení svislých posunů trigonometricky

Vzorec pro určení svislého posunu je:

$$p = h_n - h_o;\;\; p = d_o \cdot \operatorname{cotg}\zeta_n - d_o \cdot \operatorname{cotg}\zeta_o\,. \tag{3.19}$$

Rovnice pro náhodnou odchylku je: $\varepsilon_p = \varepsilon_{h_n} - \varepsilon_{h_o}$;

$$\varepsilon_p = \varepsilon_d \cdot cotg\zeta_n - \varepsilon_d \cdot cotg\zeta_o - d_o \cdot \varepsilon_{\zeta_n}/\sin^2\zeta_n + d_o \cdot \varepsilon_{\zeta_o}/\sin^2\zeta_o. \tag{3.20}$$

Po úpravě *(za předpokladu, že délka mezi etapami se nemění)*:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_d \cdot p/d_o - d_o \cdot [1 + (h_n/d_o)^2] \cdot \varepsilon_{\zeta_n} + d_o \cdot [1 + (h_o/d_o)^2] \cdot \varepsilon_{\zeta_o}. \tag{3.21}$$

Rovnice pro směrodatnou odchylku (za předpokladu, že $\boldsymbol{h^2/d^2}$ je zanedbatelné a $\boldsymbol{\sigma_{\zeta n} \approx \sigma_{\zeta o} = \sigma_\zeta}$) bude:

$$\sigma_p^2 = (\sigma_d \cdot p/d)^2 + 2 \cdot \left(\sigma_\zeta \cdot d/\rho\right)^2. \tag{3.22}$$

Rozbor přesnosti:

Zvolí se $u_p = 2$ a podmínka $\boldsymbol{\sigma_{To} = \sigma_o}$, potom z tab.3.2 je zřejmé:

$$\sigma_{To} = \sigma_o \Rightarrow \sigma_p = 0{,}7 \cdot \delta_{TM}\,. \tag{3.23}$$

Jsou dány tyto konkrétní údaje:

$\boldsymbol{p} = 1.10^{-2}$ m, $\boldsymbol{h} = 5$ m, $\boldsymbol{d} = 20$ m, $\boldsymbol{\delta_{TM}} = 5.10^{-4}$ m, $\boldsymbol{\sigma_{do}} = 5.10^{-3}$ m, $\boldsymbol{\sigma_{\zeta n} \approx \sigma_{\zeta o}} = 1$ mgon.

Počet opakováni měření je dán vzorcem:

$$\sigma_d = \sigma_{do}/\sqrt{n_d}\;\;;\;\; \sigma_\zeta = \sigma_{\zeta o}/\sqrt{n_\zeta} \tag{3.24}$$

Směrodatné odchylky měřených veličin se volí podle dostupného přístrojového vybavení.

Po dosazení konkrétních hodnot z rovnice (3.24) a (3.23) do rovnice (3.22) bude:

$$(0{,}7 \cdot 5 \cdot 10^{-4})^2 = (5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-2}/20)^2/n_d + 2 \cdot [1 \cdot 20/(6{,}4 \cdot 10^4)]^2/n_\zeta$$

a dále

$$(3{,}5 \cdot 10^{-4})^2 = (2{,}5 \cdot 10^{-6})^2/n_d + (4{,}4 \cdot 10^{-4})^2/n_\zeta \tag{3.25}$$

Z rovnice (3.25) vyplývá, že první člen je možno zanedbat a tedy $\boldsymbol{n_d} = 1$. Potom $\boldsymbol{n_\zeta}$ bude:

$$n_\zeta = [(4{,}4 \cdot 10^{-4})/(3{,}5 \cdot 10^{-4})]^2 \;\Rightarrow\; n_\zeta = 1{,}6\,.$$

Výsledek se zaokrouhlí nahoru na nejbližší vyšší jednotku měření a zenitový úhel se měří dvakrát. V tomto případě je $\boldsymbol{\sigma_{To}} = 3{,}5.10^{-4}$ m a $\boldsymbol{\sigma_o} = 3{,}1.10^{-4}$ m, což je vyhovující.

Poznámka:

V rov.(3.22) a (3.25) jsou dvě neznámé σ_d, σ_ζ , nebo n_d, n_ζ v jedné rovnici. V našem příkladu byl první člen prakticky nulový a rovnice tak byla snadno řešitelná. Obecně to však neplatí (třeba v našem příkladu při strmé záměře) a musí se tedy zvolit nějaká podmínka jako např.:

- *je-li použito elektronického dálkoměru, je pro krátké vzdálenosti a stejné podmínky prakticky zbytečné zvyšovat počet měření a n_d se volí 1,*
- *položí se první člen roven druhému,*
- *položí se $n_d = n_\zeta$ apod.*

3.4.2 Rozbor přesnosti při měření

Rozbor přesnosti při měření se omezuje pouze na hodnocení přímo měřených veličin v terénu. Tím má být zajištěno dodržení předpokládané přesnosti měření, stanovené rozborem přesnosti před měřením.
Hodnocení postačí provést testováním odlehlých měření při známé základní směrodatné odchylce metody měření. Směrodatná odchylka pro dané podmínky je zpravidla známa a hodnocení je objektivnější než u výběrové směrodatné odchylky, která se používá pouze výjimečně tehdy, když základní směrodatná odchylka známa není.
Měření se testují pomocí kritické hodnoty náhodné veličiny $u_{\alpha n}$, která je závislá na počtu opakování n a hladině spolehlivosti $(1 - \alpha) = P$, popř. hladině významnosti α (tab.3.3).

Tab.3.3 Kritická hodnota náhodné veličiny

	α	P	počet měření n					
			2	3	4	5	10	25
$u_{\alpha n}$	5%	95%	1,39	1,74	1,94	2,08	2,44	2,82
	1%	99%	1,82	2,22	2,43	2,57	2,93	3,28

Porovnávají se hodnoty extrémních odchylek měření od výběrového (aritmetického) průměru v absolutní hodnotě $|t_{ex} - \bar{t}|$ s mezní hodnotou opravy $v_M = u_{\alpha,n} \cdot \sigma_{t_i}$,

kde

- t_{ex} je extrémní hodnota měřené veličiny,
- $\bar{t}$ - výběrový (aritmetický) průměr,
- σ_{t_i} - směrodatná odchylka měřené veličiny.

Je-li hodnota extrémní odchylky větší než mezní hodnota opravy, je měření podezřelé z odlehlosti. Protože rozbor přesnosti byl proveden pro n měření, musí být jejich počet minimálně dodržen. Proto se přidá další měření (v malých souborech vhodná dvě měření), čímž se hodnocený soubor rozšíří a zvýší se jeho objektivita. Tím se změní hodnota průměru $\bar{t}$ a kritická hodnota $u_{\alpha n}$. Rozšířený soubor se znovu testuje a je-li podezřelé měření opět odlehlé, ze souboru se vyloučí.
V souboru může být více odlehlých měření. Další podrobnosti jsou uvedeny v [1] a [13].

3.4.3 Rozbor přesnosti po měření

Rozborem přesnosti po měření se hodnotí dosažené výsledky a zjišťuje se, zda odpovídají požadované (projektované) přesnosti.

a) Pro dvojici měření

Hodnotí se dosažený rozdíl dvojího měření Δ :

$$\Delta = |p_1 - p_2| \ , \tag{3.26}$$

kde p_1 a p_2, je první a druhé měření.

Směrodatná odchylka rozdílu:

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\left(\sigma_{p_1}^2 + \sigma_{p_2}^2\right)} \ ; \ pro\ \sigma_{p_1} \approx \sigma_{p_2} = \sigma_o \text{: } \sigma_\Delta = \sqrt{2} \cdot \sigma_o \ ; \ popř. \ \sigma_\Delta = \sqrt{2} \cdot \sigma_{To} \tag{3.27}$$

Mezní rozdíl je potom: $\Delta_M = u_p \cdot \sigma_o \cdot \sqrt{2}$, popř. $\Delta_{TM} = u_p \cdot \sigma_{To} \cdot \sqrt{2}$. (3.28a)
Výsledek je vyhovující, je-li splněna nerovnost:

$$\Delta_M \leq \Delta \ , \quad popř. \ \Delta_{TM} \leq \Delta. \tag{3.29}$$

b) Pro dvojici vytyčení

Opět se hodnotí dosažený rozdíl mezi prvním a druhým vytyčením (rovnice 3.26) mezním rozdílem Δ_{Mv}, vypočteným ze vztahu:

$$\Delta_{Mv} = u_p \cdot \sqrt{2(\sigma_{tm}^2 + \sigma_r^2)} \quad \text{, popř.} \qquad \Delta_{Mv} = u_p \cdot \sqrt{2(\sigma_{Tm}^2 + \sigma_r^2)} \,. \qquad (3.28b)$$

Pro hodnocení výsledku vytyčení platí rovnice (3.29).

Výběrová směrodatná odchylka průměru dvojice je:

$$s_{\bar{t}} = \Delta/2$$

K výsledku se však neuvádí výběrová, ale požadovaná směrodatná odchylka $\boldsymbol{\sigma_T}$ (popř. teoretická směrodatná odchylka metody $\boldsymbol{\sigma_o/\sqrt{2}}$).

V rov.(3.28) je otázka zda použít stejného koeficientu spolehlivosti $\boldsymbol{u_p}$ jako u rozboru před měřením. Platí zásada, že pokud bylo použito např. $\boldsymbol{u_p}$ = 3, z důvodu vlivu nepostihnutelné systematické odchylky, měla by se při rozboru přesnosti po měření použít menší hodnota např. 2,5 nebo 2. Důvodem je skutečnost, že systematická odchylka ovlivní obě měření stejně a v jejich rozdílu se tedy neuplatní.
Další otázkou je zda použít v rovnici (3.28) požadovanou směrodatnou odchylku $\boldsymbol{\sigma_{To}}$ nebo menší směrodatnou odchylku metody $\boldsymbol{\sigma_o}$. Rozhodující je splnění vztahu (3.29). Pokud by rozdíl $\boldsymbol{\Delta}$ překročil mezní rozdíl $\boldsymbol{\Delta_M}$, vypočtený se směrodatnou odchylkou metody $\boldsymbol{\sigma_o}$, znamená to nedodržení uvažované přesnosti měření, což by mělo být zdůvodněno.

a) Pro více měření než dvě

Tento případ nastává tehdy, je-li při rozboru přesnosti před měřením rozhodnuto, že výsledkem bude průměr ze tří či více měření, nebo není-li splněn vztah (3.28) a přidává se další měření. Potom se hodnotí výběrová směrodatná odchylka jednoho měření s_t vztahem:

$$s_t \le s_M \,, \qquad (3.30a)$$

kde:
$$s_M = \sigma_o \cdot \left[1 + \sqrt{2/n'}\right],$$

popř.
$$s_t \le s_{TM} \,,$$

kde:
$$s_{TM} = \sigma_{To} \cdot \left[1 + \sqrt{2/n'}\right].$$

nebo výběrová směrodatná odchylka průměru $\boldsymbol{s_{\bar{t}}}$ nerovností:

$$s_{\bar{t}} \le s_{M\emptyset} \,, \qquad (3.31)$$

kde:
$$s_{M\emptyset} = \sigma_{\emptyset} \cdot \left[1 + \sqrt{2/n'}\right],$$

popř.
$$s_{\bar{t}} \le s_{TM\emptyset} \,,$$

kde:
$$s_{TM\emptyset} = \sigma_T \cdot \left[1 + \sqrt{2/n'}\right] \,,$$

kde $\boldsymbol{n'}$ je počet nadbytečných měření a $\boldsymbol{s_t}$, popř. $\boldsymbol{s_{\bar{t}}}$ se počítá z rovnice:

$$s_t = \sqrt{\sum vv/(n-1)} \quad \text{, popř. } s_{\bar{t}} = \sqrt{\sum vv/[n \cdot (n-1)]} \qquad (3.32)$$

kde $\boldsymbol{v}$ jsou opravy od výběrového (aritmetického) průměru
$\boldsymbol{n}$ je počet měření.

Pokud byla provedena tři měření pro nedodržení vztahu (3.29), mohou nastat tyto možnosti:

- vztah (3.30) nebo (3.31) je splněn, potom výsledkem je průměr ze tří vytyčení (měření),

- vztah (3.30) nebo (3.31) není splněn, potom se ze tří měření naleznou dvě, která splňují vztah (3.29),
- není-li splněn vztah (3.30) ani (3.29), je špatná technologie nebo její realizace.

b) Pro více vytyčení než dvě

Hodnocení i závěry jsou opět obdobné s tím, že výběrová směrodatná odchylka jednoho měření s_t se hodnotí s mezní směrodatnou odchylkou s_M, popř. s_{TM} , vypočtenou ze vztahu:

$$s_M = \sqrt{\sigma_{tm}^2 + \sigma_r^2} \cdot \left[1 + \sqrt{2/n'}\right], \text{ popř. } s_{TM} = \sqrt{\sigma_{Tm}^2 + \sigma_r^2} \cdot \left[1 + \sqrt{2/n'}\right], \qquad (3.30b)$$

nebo analogicky pro směrodatnou odchylku průměru, jako v případě zaměření.

SEZNAM LITERATURY:

[1] BÖHM,J.-RADOUCH,V.-HAMPACHER,M.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. 2.vyd., GKP Praha, 1990.

[6] ČSN 73 0212-1. Geometrická přesnost ve výstavbě. Kontrola přesnosti. Základní ustanovení.

[10] ČSN 73 0420-1. Přesnost vytyčování staveb – Část 1: Základní požadavky. 02/07/01.

[11] ČSN 73 0420-2. Přesnost vytyčování staveb – Část 2: Vytyčovací odchylky. 02/07/01.

[12] ČSN 73 0405. Měření posunů stavebních objektů. 97/12/01.

[13] HAMPACHER,M.-ŠTRONER,M.: Zpracování a analýza měření v inženýrské geodézii. 1.vyd., ČVUT v Praze, 2011.