

SYLABUS 4. PŘEDNÁŠKY Z INŽENÝRSKÉ GEODÉZIE

(Měření a vytyčování délek)

**3. ročník bakalářského studia
studijní program G
studijní obor G**

doc. Ing. Jaromír Procházka, CSc.

říjen 2015

4. MĚŘENÍ A VYTYČOVÁNÍ DÉLEK

4.1. TŘÍDY PŘESNOSTI MĚŘENÍ DÉLEK

Dělení pro technické obory pro kratší délky v rozmezí 5 m – 50 m. Platí zásada, že kratší délky se měří s vyšší přesností než delší. Nejvyšší požadavky jsou kladeny na geodetická měření ve strojírenství.

Tab. 4.1 Třídy přesnosti měření délek od 5 do 50 m

Třída přesnosti	Směrodatná odchylka [mm]
1	0,001
2	0,01
3	0,1
4	0,5 – 1,0
5	1,0 – 5,0
6	5,0 a více

4.2. OPRAVY MĚŘENÝCH A VYTYČOVANÝCH DÉLEK

Pracuje se s projektovanými hodnotami, tj. s délkami, které je nutno vytyčovat ve skutečnosti. Pro výpočty v souřadnicích je nutno projektované (popř. měřené) délky redukovat do nulové hladiny a do zobrazení, pro délky vypočtené ze souřadnic např. pro vytyčování se opravy uvažují s opačným znaménkem.

4.2.1. Oprava z nadmořské výšky

Oprava na nulovou hladinu: ; Přepočítání měřené délky na nulovou hladinu:

$$o_H = -\frac{H \cdot d}{R} \quad ; \quad d_o = d \cdot \frac{R}{R+H} \quad , \quad (4.1)$$

kde H ... průměrná nadmořská výška,
 d ... měřená vzdálenost,
 R ... střední poloměr Země (6 381 km).

4.1.1. Oprava ze zobrazení

Pro Křovákovo zobrazení:

$$o_z = -d \cdot \frac{(m_1 + 4m_0 + m_2)}{6} \approx -d \cdot m_0 \quad , \quad (4.2)$$

kde m_1 , m_0 , m_2 jsou délková zkreslení zobrazovacích rovnoběžek, které procházejí koncovými body a středem délky. Pro kratší vzdálenosti, používané obvykle v inženýrské geodézii, postačí přibližný vzorec. Hodnoty se určí z tabulek nebo grafů. Extrémní hodnoty pro vzdálenost 1 km jsou – 0,10 m a + 0,13 m.

Pro Gaussovo zobrazení:

$$o_z = y^2 \cdot d / (2R^2) \quad , \quad (4.3)$$

kde y je rovinná souřadnice (vzdálenost od základního poledníku). Oprava je vždy kladná a u okraje 3° pásu dosahuje hodnoty 0,14 m/km.

4.3. METODY MĚŘENÍ A VYTYČOVÁNÍ DÉLEK

Měření a vytyčování délek lze rozdělit podle metody měření na přímé a nepřímé.

Přímé měření:

- pevná (tuhá) měřidla,
- svinovací měřidla (pásma, dráty)
- elektronické dálkoměry.

Nepřímé měření:

- paralaktické měření délek,
- dvojobrazové dálkoměry,
- ryskový dálkoměr,
- trigonometrický způsob.

4.3.1. Přímé měření délek

4.3.1.1. Pevná (tuhá) měřidla

Pevná (tuhá) měřidla se používají pro velmi krátké vzdálenosti do 5 m, a to zejména ve strojírenství (třída přesnosti 1 až 3). V geodézii se používají pro kalibraci měřidel (etalon).

4.3.1.2. Svinovací měřidla

Převážně se používají pásma, výjimečně dráty. Délka pásem je zpravidla od 5 do 50 m a nejčastěji jsou ocelová (s ochrannou vrstvou či eloxovaná), pro speciální účely z umělé hmoty (nevodivá) a pro nejpresnější práce invarová.

Přesnost lze charakterizovat úplnou směrodatnou odchylkou σ_d průměru ze dvou měření, která má složku náhodnou a systematickou:

$$\sigma_d = \sqrt{\lambda_s^2 \cdot d^2 + \lambda_n^2 \cdot d} \quad (4.4)$$

kde λ_s je koeficient vlivu systematické odchylky,
 λ_n - koeficient vlivu náhodné odchylky,
 d - měřená délka v metrech.

Měření svinovacími měřidly lze podle přesnosti a s tím souvisejícího způsobu měření rozdělit do tří skupin:

- **Běžné měření**, při kterém se měří vodorovné délky, konec pásma se provažuje olovnicí, zařazení do směru se provádí přes pásmo od oka a napínací síla se odhaduje. V tomto případě lze uvažovat koeficienty $\lambda_s = 1,5 \cdot 10^{-4}$, $\lambda_n = 1,5 \cdot 10^{-3}$ (Na příklad: pro $d = 100$ m je potom $\sigma_d = 22$ mm).
- **Přesné měření**, při kterém se měřená délka dělí na úseky kratší než je délka pásma, mezibody se stabilizují kolíky s křížkem či jemným hřebíčkem, které se do směru zařazují teodolitem a jejich výška se určí nivelací. Měří se šikmé délky z kolíku na kolík, a to kalibrovaným pásmem, určuje se teplota vzduchu a napínací síla se zajišťuje siloměrem. Do měřené délky se zavádí příslušné opravy (následující odstavec). Koeficienty pro tento typ měření se uvažují: $\lambda_s = 0,5 \cdot 10^{-4}$, $\lambda_n = 0,5 \cdot 10^{-3}$ (pro $d = 100$ m je potom $\sigma_d = 7$ mm).
- **Velmi přesné měření**, při kterém se měří speciálními invarovými pásmy s nasazovacími stupničkami, délka je rozdělena na úseky kratší než je klad pásma, mezibody se osazují kovovými čepy s ryskami v trojnožkách na stativěch, ke kterým se přikládají stupničky s milimetrovým dělením. Pásmo se napíná přes kladky závažím předepsané hmotnosti, výšky čepů se nivelují. Pásmo je kalibrováno a určuje se teplota vzduchu při měření. Do měřené délky se zavádí příslušné opravy (následující odstavec). Koeficienty pro tento typ měření: $\lambda_s = 0,15 \cdot 10^{-4}$, $\lambda_n = 0,15 \cdot 10^{-3}$ (pro $d = 100$ m je potom $\sigma_d = 2$ mm).
- **Speciální měření** pro měření délkových změn při měření relativních vodorovných posunů byla vyvinuta švýcarskou firmou Kern (dnes již neexistující) měřická souprava Distometr ISTEH, která se skládá z mikrometru pro měření délkových změn v omezeném rozsahu cca 0,1 m, zařízení pro měření napětí (ručičkový ukazatel), z invarového drátu potřebné délky (maximálně do 100 m) a spojovacích částí. Dosah měření je omezen délkou invarového drátu, přesnost určení délkových změn je nejméně desetinásobná oproti velmi přesnému měření. Tímto postupem však nelze měřit délky, ale pouze jejich změny!

Opravy měřených délek

Naměřené délky se opravují o řadu vlivů, které znehodnocují výsledek a mají **systematický charakter**. U přesného a velmi přesného měření se zavádí opravy z kalibrace, z teploty, z protažení a z průhybu pásma a z převýšení.

Oprava z nesprávné délky pásma (z kalibrace)

$$o_1 = \Delta l \cdot d / l, \quad (4.5)$$

kde Δl je odchylka délky pásma od nominální hodnoty,

l - délka pásma,

d - měřená délka.

V kalibračním protokolu jsou uvedeny opravy pro každý metr délky pásma, teplota při kalibraci, včetně koeficientu teplotní roztažnosti zkoušeného pásma a použitá napínací síla. Směrodatná odchylka v určení délky na komparátoru se udává hodnotou 0,005 mm.

Oprava ze změny teploty

$$o_2 = \alpha \cdot (t - t_0) \cdot d, \quad (4.6)$$

kde α je koeficient teplotní roztažnosti pásma (ocel 11 až $12 \cdot 10^{-6}$, invar do $2,5 \cdot 10^{-6}$)

t - teplota při měření,

t_0 - teplota při kalibraci,

d - měřená délka.

Vzhledem k tomu, že teplota vzduchu zpravidla zcela neodpovídá teplotě pásma a použití kontaktních teploměrů je komplikovanější, může teplotní vliv působit poněkud problémy.

(Příklad: pro $d=100m$, $t-t_0=5^\circ C$ a $\alpha=12 \cdot 10^{-6}$ je $o_2=6 mm$).

Oprava z protažení pásma

$$o_3 = l \cdot (F - F_0) / (q \cdot E), \quad (4.7)$$

kde l je délka pásma,

F - napínací síla při měření,

F_0 - napínací síla při kalibraci,

q - průřez pásma,

E - modul pružnosti materiálu.

Vzorec platí pro vodorovné pásmo.

(Příklad: pro $l = 20 m$, $F - F_0 = 50 N$, $q = 4 mm^2$, $E = 200\,000 N/mm^2$ je $o_3 = 1,25 mm$).

Oprava z průhybu pásma

$$o_4 \approx -l^3 \cdot G^2 / (24 \cdot F^2), \quad (4.8)$$

kde l je délka pásma,

G - tíže ($G = m \cdot g$),

m - hmotnost 1 m pásma,

g - tíhové zrychlení $9,81 m/sec^2$,

F - napínací síla při měření,

Vzorec platí pro vodorovné pásmo.

(Příklad: pro $l = 20 m$, $G = 0,20 N/m$, ($m = 0,02 kg$), $F = 100 N$ je $o_4 = 1,3 mm$).

Oprava z nevodorovné polohy pásma

$$o_5 \approx -h^2 / (2 \cdot l), \quad (4.9)$$

kde l je délka pásma,

h - převýšení mezi koncovými body.

(Příklad: pro $l = 20 m$, $h = 0,5 m$ je $o_5 = 6,2 mm$; ale pro $h = 2 m$ je $o_5 = 100 mm$!!).

S touto opravou souvisí i přesnost určení převýšení. Směrodatná odchylka opravy σ_5 , v závislosti na přesnosti převýšení, se vypočte ze vztahu:

$$\sigma_{05} = h \cdot \sigma_h / l, \quad (4.10)$$

kde σ_{05} je směrodatná odchylka opravy σ_5 ,
 σ_h - směrodatná odchylka převýšení.

(Příklad: pro $l = 20 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $\sigma_h = 0,05 \text{ m}$ je $\sigma_{05} = 2,5 \text{ mm}$).

Všechny uvedené opravy mají systematický charakter. První je konstantní, druhá a třetí proměnná, čtvrtá a pátá jednostranná.

Výsledky měření dále ovlivňují i **náhodné odchylky**. Sem patří odchylka z provázení konce pásma olovnicí (při běžném měření), odchylka z přiřazení pásma a odchylka ze čtení pásma na konci délky (liší se podle technologie měření).

Z uvedených příkladů je patrné, že nezavedení oprav nebo použití nevhodného technologického postupu může výrazně ovlivnit přesnost výsledků měření.

4.3.1.3. Elektronické dálkoměry

Elektronické dálkoměry byly podrobně probrány v předmětě „Elektronické metody v geodézii“. Proto pouze velmi stručně.

Přesnost elektronických dálkoměrů je charakterizována rovnicí pro směrodatnou odchylku měřené délky:

$$\sigma_d = a + b \cdot d \cdot 10^{-6} [\text{mm}], \quad \text{nebo též} \quad \sigma_d = a \text{ mm} + b \text{ ppm}, \quad (4.11)$$

kde a a b jsou konstanty, které uvádějí výrobci pro určitý typ přístroje a d je měřená délka, tedy např.: ($\sigma_d = 3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$).

Měřená vzdálenost je šikmá a je nutno ji opravit o fyzikální redukci, závislou na teplotě, atmosférickém tlaku a vlhkosti vzduchu. Tyto údaje se obvykle měří pouze u přístroje, výjimečně i u cílového hranolu. Jejich neznalost v průběhu celé délky záměry může nepříznivě ovlivňovat přesnost měřené délky, a to v závislosti na délce záměry, převýšení koncových bodů, výšce záměry nad terénem, složení povrchu (asfalt, beton, travnatá plocha, vodní plocha apod.) a průběhu záměry zastíněným či osluněným prostředím.

Je třeba dále rozlišit v nastavení odpovídající adiční konstanty, měří-li se vzdálenost na odrazný hranol, který je kompatibilní s použitým elektronickým dálkoměrem či hranol jiného výrobce, na odrazný terč nebo v bezhranolovém módu.

Opravy je možno určit z tabulek, nomogramů nebo početně ze vzorců daných výrobcem a zavést do paměti dálkoměru. Současné totální stanice si počítají a zavádějí fyzikální redukce automaticky po dosazení naměřených hodnot teploty, tlaku a vlhkosti, stejně jako opravy matematické (z nadmořské výšky a ze zobrazení), ovšem po nastavení odpovídajících hodnot. **Je tedy vždy třeba před zahájením měření délek zkontrolovat v totální stanici aktuálnost nastavených hodnot!**

4.3.1.4. Laserové interferometry

Laserové interferometry jsou určeny pro délková měření s extrémní přesností, přičemž měřená délka je převedena na souvislou změnu polohy koutového odražeče. Měřicí zařízení (laser a hranoly) musí být umístěny v přímce (např. na vodící liště). Nelze měřit délku absolutní. Vnější přesnost měřené délky je 0,5 až 1,0 μm při ustáleném stavu atmosféry.

Nejširší možností použití laserových interferometrických měřičů délek jsou v oblasti:

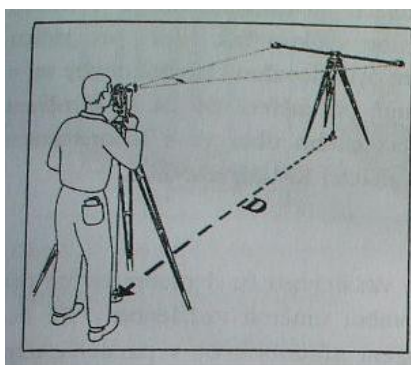
- strojírenství – odměřovací systémy obráběcích strojů, bezdotyková kontrola geometrické přesnosti součástí, dynamická měření posunů, mechanických i tepelných deformací atd.
- metrologie – kontrola čárkových měřidel, a to při jejich výrobě i při provozu (v oblasti geodézie významné pro kalibraci měřidel).

4.3.2. Nepřímé měření délek

4.3.2.1. Paralaktické měření délek

Tento poměrně přesný způsob určování délek má v současnosti využití již pouze pro některé speciální práce v inženýrské geodézii, a to na krátké vzdálenosti, kde při dodržení stanovených podmínek dává velmi přesné výsledky. Používá se zejména pro stanovení rozměru mikrosítě nebo délkových základen pro protínání vpřed, a to zejména v úlohách, kde se požadovaná přesnost výsledků měření pohybuje v desetinách milimetrů.

Soupravu pro měření délek pomocí latě konstantní délky (tzv. základnové latě) tvoří teodolit 2.třídy přesnosti (vteřinový či dvouvteřinový, např. Zeiss Theo 010A nebo 010B), vodorovná invarová základnová lať konstantní délky 2 m a 2 stativy (obr.1).



Obr.1 Paralaktické měření délek



Obr.2 Základnová lať Zeiss Bala

Základnová lať je konstruována tak, aby při běžných pracích nebylo nutno uvažovat vliv tepelné roztažnosti (vzdálenost cílových značek je zajištěna invarovým drátem). Skládá se ze dvou cca 1m dlouhých částí, tvořených trubkovou konstrukcí a spojených uprostřed kulovitou střední částí s čepem pro vložení do trojnožky. Krabicová libela na horní ploše slouží k urovňování latě do vodorovné polohy. Na koncích ramen jsou v rámečcích uloženy skleněné destičky s cílovými znaky (obr.2 a 4). Cílový znak romboického tvaru je umístěn i na střední části (obr.2 a 3), kam je možno cílit pro určení směru na koncový bod. Velmi důležité je správné složení obou dílů latě, které je zajištěno výstupkem na jedné části latě a odpovídajícím vybráním na druhé části (jednotlivé díly se po zapojení nesmí vůči sobě otáčet). Spojení se zajistí převlečnou maticí.

Cílové trojúhelníkové značky jsou bílé, na vrchol postavené trojúhelníky na černém pozadí (obr.4). Přesná délka latě je udána dvěma páry černých dvojrysek s ohledem na měřenou vzdálenost (jemnější značky pro krátké vzdálenosti), popř. na rubové straně dvě černé kruhové výseče, otočené proti sobě (obr.5).



Obr.3 Střední část základnové latě

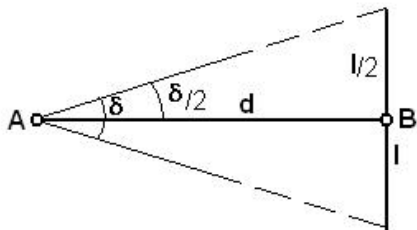


Obr.4 Cílové značky - lícová strana



Obr.5 Cílové značky - rubová strana

Základnová lať musí být umístěna kolmo k měřené délce, k čemuž slouží sklopný kolimátor (obr.3), v jehož zorném poli se zobrazuje bílý klínek, který je nutno, po uvolnění svěrného šroubu trojnožky, pootáčením latě nasměrovat na teodolit. Po zacílení je třeba svěrný šroub opět s citem dotáhnout. Při měření musí být lať ve vodorovné poloze.



Obr.6 Výpočet paralakticky měřené délky

Paralaktický úhel δ (obr.6) se měří v polovičních laboratorních jednotkách a délka se počítá podle vzorce:

$$d = \frac{l}{2} \cdot \cotg \delta/2, \quad (4.12)$$

kde d je určovaná vzdálenost,
 l - délka základnové latě,
 δ - měřený paralaktický úhel.

Měřená délka je vodorovná, protože se měří vodorovný úhel na limbu, mezi dvěma svislými rovinami.

Měření v polovičních laboratorních jednotkách (*skripta Inženýrská geodézie – Návod ke cvičením*)

Poloviční laboratorní jednotka (PLJ) se měří podle schématu LLPPPPLL v první poloze dalekohledu, při otáčení alhidády v kladném smyslu, tj. ve směru otáčení hodinových ručiček. Symboly L, P znamenají nezávislé cílení a čtení na levou (L) a pravou (P) cílovou značku. Aby opakovaná cílení a čtení byla opravdu nezávislá je nutno jemnou ustanovkou porušit zacílení, pustit jemnou ustanovku, mikrometrickým šroubem porušit koinkidenci, pustit mikrometrický šroub a teprve potom znovu zacílit a zkoinkidovat úhloměrné stupnice. Při dokončování PLJ se z pravé značky nevrací na levou protisměrným pohybem, ale otáčí se stále v kladném smyslu (tedy téměř o 400 gon).

Pro přesné práce se zásadně dalekohledem cílí na střed jemnějších dvojrysek (obr.4), ke kterým je základnová lať kalibrována, a to obvykle jednoduchou svislou ryskou poblíž středu ryskového kříže. S ohledem na velikost cílové značky v dalekohledu (podle měřené vzdálenosti) je někdy výhodné použít pro zacílení dvojrysky ryskového kříže.

Vzhledem ke kontrole měření a hodnocení jeho přesnosti se paralaktický úhel měří minimálně ve dvou PLJ (podle výsledků rozboru přesnosti). Počáteční čtení ve druhé a dalších PLJ se volí libovolné (obvykle jen náhodné otočení limbu pastorkem), je však nutno alespoň zhruba rozložit čtení po mikrometrické stupnici a protočit teodolitem.

Dodržení přesnosti měření se hodnotí okamžitě testem odlehklých měření (rozbor přesnosti při měření) při známé základní směrodatné odchylce metody, která je pro jednu PLJ $\sigma_{\delta_0} = 0,4$ mgon.

Paralaktické úhly, jejichž ramena jsou stejně dlouhá (nemusí se tedy při cílení přestřovat) a mají stejný zenitový úhel (což je při měření na základnovou lať splněno), se měří pouze v jedné poloze dalekohledu, protože osová chyby teodolitu se uplatní v obou vodorovných směrech stejně, což zhruba platí i pro chybu z nepřesné horizontace (úhel je navíc malý). Paralaktický úhel, jako rozdíl dvou směrů, jimi proto není ovlivněn.

• **Paralaktické měření délek s latí na konci**

Princip určení délky paralaktickým měřením s latí na konci je znázorněn na obrázku č.6, a délka se počítá podle vzorce (4.12).

Přesnost určované vzdálenosti se odvodí aplikací zákona hromadění náhodných a směrodatných odchylek. Vztah pro náhodné odchylky, odvozený parciálními derivacemi rovnice (4.12) je:

$$\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_l}{2} \cdot \cotg \frac{\delta}{2} - \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta/2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_\delta, \quad (4.13)$$

Pro úhly $\delta \rightarrow 0$ platí, že $\sin \delta/2 \approx \tan \delta/2$, takže druhý člen rovnice (4.13) lze upravit s použitím vztahu (4.12) na tvar:

$$\frac{l}{2} \cdot \cotg^2 \delta/2 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_\delta = \frac{l}{2} \cdot \frac{(2d)^2}{l^2} \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_\delta = \frac{d^2}{l} \cdot \varepsilon_\delta.$$

Potom vzorec pro náhodné odchylky bude:

$$\varepsilon_d = \frac{d}{l} \cdot \varepsilon_l - \frac{d^2}{l} \cdot \varepsilon_\delta. \quad (4.14)$$

Po přechodu na směrodatné odchylky a při vyjádření σ_δ v úhlové míře se získá vzorec:

$$\sigma_d^2 = \frac{d^2}{l^2} \cdot \sigma_l^2 + \frac{d^4}{l^2 \cdot \rho^2} \cdot \sigma_\delta^2, \quad (4.15)$$

kde σ_l je směrodatná odchylka délky základnové latě určené kalibrací,
 σ_δ - směrodatná odchylka paralaktického úhlu.

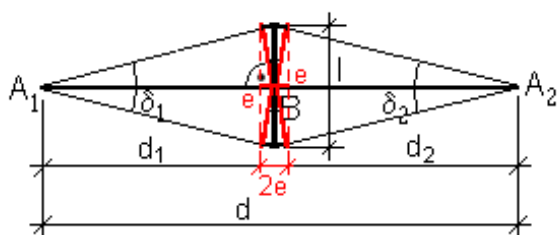
Vzhledem k tomu, že první člen ve vzorci (4.15) se prakticky neuplatní ($\sigma_l \approx 1 \cdot 10^{-5}$ m), vzorec se často upravuje na tvar:

$$\sigma_d = \frac{d^2}{2 \cdot \rho} \cdot \sigma_\delta. \quad (4.16)$$

Vzorec platí pro d v metrech a délku základnové latě 2 m (l je nahrazeno 2)!

• **Paralaktické měření délek s latí uprostřed**

Ze vzorce (4.16) plyne, že přesnost délky určené paralakticky s latí na konci, vyjádřená směrodatnou odchylkou σ_d , klesá s kvadrátem vzdálenosti, čili velmi rychle. Výrazného zpřesnění se dosáhne umístěním základnové latě doprostřed určované vzdálenosti (obr.7).



Obr.7 Paralaktické měření délky - lat' uprostřed

Uvedený postup má dvě varianty:

- lat' se přetáčí (je jednostranná),
- lat' se nepřetáčí (je oboustranná, rubová strana je opatřena cílovými značkami - obr.5).

▪ **Lat' se přetáčí**

V tomto případě se vychází z rovnice:

$$d = d_1 + d_2 + 2e = \frac{l}{2} \cdot \left(\cotg \frac{\delta_1}{2} + \cotg \frac{\delta_2}{2} \right) + 2e, \quad (4.17)$$

kde $d_1 \approx d_2 = d/2$ je polovina měřené délky,
 δ_i - paralaktický úhel,
 e - podélná excentricita základnové latě (její velikost je řádově v 0,1 mm).

Přesnost určované vzdálenosti se opět odvodí aplikací zákona hromadění náhodných a směrodatných odchylek. Vztah pro náhodné odchylky, odvozený z rovnice (4.17) a upravený podobně jako v předchozím případě je:

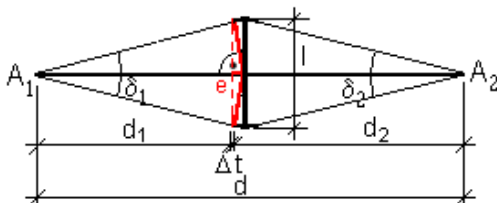
$$\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_l}{2} \cdot \left(\frac{d}{l} + \frac{d}{l} \right) - \frac{l}{4} \cdot \left(\frac{d^2}{l^2} \cdot \varepsilon_{\delta 1} + \frac{d^2}{l^2} \cdot \varepsilon_{\delta 2} \right) + 2 \cdot \varepsilon_e. \quad (4.18)$$

Vzorec pro směrodatnou odchylku paralakticky měřené délky s latí uprostřed, která se přetáčí a za předpokladu že $\sigma_{\delta 1} \approx \sigma_{\delta 2} = \sigma_\delta$ a po další úpravě bude:

$$\sigma_d^2 = \frac{d^2}{l^2} \cdot \sigma_l^2 + \frac{d^4}{8l^2 \cdot \rho^2} \cdot \sigma_\delta^2 + 4\sigma_e^2. \quad (4.19)$$

Přesnost délky je ovlivněna podélnou excentricitou, která se uplatní dvojnásobně!

▪ **Lat' se nepřetáčí**



Obr.8 Paralaktické měření délky - oboustranná lat' uprostřed

V tomto případě se snižuje vliv nepřesnosti v kalibraci latě (líc a rub latě jsou určeny nezávisle) a postupem měření se vyloučí systematický vliv podélné excentricity základnové latě. Navíc se však musí uvážit tloušťka sklíčka Δt mezi cílovými značkami na líci a na rubu (obr.8). Tu lze ale změřit na 0,01 mm dotykovým mikrometrem.

Výchozí rovnice bude následující:

$$d = d_1 + d_2 + \Delta t = \frac{l_p}{2} \cdot \cotg \frac{\delta_p}{2} + \frac{l_z}{2} \cdot \cotg \frac{\delta_z}{2} + e - e + \Delta t, \quad (4.20)$$

kde $d_1 \approx d_2 = d/2$ je polovina měřené délky,

l_p - délka lícové (přední) strany základnové latě,

l_z - délka rubové (zadní) strany základnové latě,

δ_p - paralaktický úhel měřený na lícovou stranu latě,

δ_z - paralaktický úhel měřený na rubovou stranu latě,

e - podélná excentricita základnové latě,

Δt - tloušťka sklíčka mezi lícovou a rubovou cílovou značkou.

Vztah pro náhodné odchylky, odvozený z rovnice (4.20) a upravený podobně jako v předchozím případě je:

$$\varepsilon_d = \frac{\varepsilon_{lp}}{2} \cdot \left(\frac{d}{l}\right) + \frac{\varepsilon_{lz}}{2} \cdot \left(\frac{d}{l}\right) - \frac{l}{4} \cdot \left(\frac{d^2}{l^2} \cdot \varepsilon_{\delta p} + \frac{d^2}{l^2} \cdot \varepsilon_{\delta z}\right) + \varepsilon_{\Delta t}. \quad (4.21)$$

Vzorec pro směrodatnou odchylku paralakticky měřené délky s oboustrannou latí uprostřed, která se nepřetáčí a za předpokladu že $\sigma_{lp} \approx \sigma_{lz} = \sigma_l$ a $\sigma_{\delta p} \approx \sigma_{\delta z} = \sigma_\delta$ a po další úpravě bude:

$$\sigma_d^2 = \frac{d^2}{2l^2} \cdot \sigma_l^2 + \frac{d^4}{8l^2 \cdot \rho^2} \cdot \sigma_\delta^2 + \sigma_{\Delta t}^2. \quad (4.22)$$

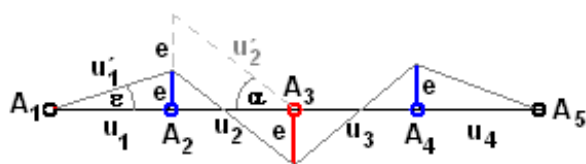
• **Paralaktické měření délek vysoké přesnosti (Adámkova metoda)**

Adámkova metoda paralaktického měření délek vysoké přesnosti, která ve své době (50. léta 20. století) umožňovala měřit délky s relativní přesností 1:100 000 (tedy 100 m délku s přesností kolem 1 mm) je v současnosti překonanou metodou, plně nahrazenou elektronickými dálkoměry nejvyšší přesnosti (především co do pracnosti a náročnosti měření). Přesto je stále ukázkou lidského důvtipu a vynalézavosti při eliminaci především systematických chyb, znehodnocujících výsledky měření, a to i při současné moderní technice, je-li požadována přesnost výsledků řádově v desetinách milimetrů.

Základní myšlenkou bylo omezení délek záměr rozdělením měřené vzdálenosti na krátké články, které byly dále děleny na dva úseky, měřené nezávisle. Chyba paralakticky měřené délky klesá s kvadrátem vzdálenosti a naopak roste s odmocninou počtu úseků. Tedy například rozdělením délky $d = 100\text{m}$ na 4 úseky bude přesnost jednotlivých úseků $4^2=16\text{x}$ vyšší než přesnost délky d , měřené paralakticky s latí na konci. Při nezávislých měřeních úseků, klesá přesnost součtu jejich délek s odmocninou ze 4. Lze tedy očekávat, že Adámkova metoda bude ve zvoleném příkladu $4^2/\sqrt{4} = 16/2 = 8\text{x}$ přesnější.

Výsledek je však ovlivňován řadou nepříznivých (systematických) vlivů, které je nutno vyloučit. Proto bylo použito upravených základnových latí s oboustrannými cílovými značkami (obr.4 a 5), a délka latě byla kalibrována na líci i na rubu. Lať se stavěla doprostřed článku a nepřetáčela se, čímž se odstranila, při zavedení tloušťky sklíčka, **podélná excentricita latě** (viz předchozí odstavec).

Vliv chyby z kalibrace základnové latě se snížil použitím druhé základnové latě při kontrolním měření, které bylo nedílnou součástí metody měření.



Obr.9 Vliv excentricity mezibodů na měřenou délku

Mezilehlé body (stanoviska teodolitu a latí) se vytyčovaly teodolitem z koncových bodů, délky úseků se rozměřovaly pásmem s přesností na 0,1 m. Vychází-li se z požadavku, aby **excentricita mezibodů** neovlivnila měřenou délku (tj. aby chyba způsobená excentricitou nepřekročila hodnotu 0,1 mm), vypočte se její mezní

hodnota ze vztahu, odvozeného z obrázku č.9, kde je modře vyznačeno postavení latě a červeně postavení teodolitu.

Rozdíl v délce prvního a posledního úseku (u_1 a u_4) při mezní excentricitě e je:

$$\Delta_{Mu1} = u'_1 - u_1 = u'_1 - u'_1 \cdot \cos \varepsilon \approx u'_1 - u'_1 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = u'_1 \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (4.23)$$

kde $\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{e}{u}$ je úhel odpovídající mezní excentricitě e

a po dosazení: $\Delta_{Mu1} = \frac{e^2}{2u^2} \cdot u = \frac{e^2}{2u}$

Pro úseky mezi mezibody (u_2 a u_3) je:

$$\Delta_{Mu2} = u'_2 - u_2 = u'_2 - u'_2 \cdot \cos \alpha \approx u'_2 - u'_2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) = u'_2 \cdot \frac{\alpha^2}{2},$$

kde $\frac{\alpha}{\rho} = \frac{2e}{u}$ je úhel odpovídající dvojnásobku mezní excentricity e (uvažován nejnepříznivější případ)

a po dosazení: $\Delta_{Mu2} = \frac{4e^2}{2u^2} \cdot u = \frac{2e^2}{u}$.

Pro celou délku $d(u_1+u_2+u_3+u_4)$ pak platí:

$$\Delta_{Md} = \frac{e^2}{u} \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 + 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{u} \cdot (2n - 3), \quad (4.24)$$

kde n je počet úseků.

Z rovnice (4.24) se potom vypočítá mezní hodnota příčné excentricity:

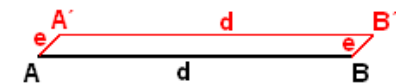
$$e = \sqrt{\frac{u \cdot \Delta_{Md}}{2n-3}}, \text{ popř. } e = \sqrt{\frac{u \cdot \Delta_{Md}}{2k-5}}, \quad (4.25)$$

kde k je počet všech bodů (krajních i mezibodů).

Pro $\Delta_{Md} = 1 \cdot 10^{-4}$ lze pak vzorec upravit na tvar:

$$e = \frac{\sqrt{u} \cdot 10^{-2}}{\sqrt{2n-3}}, \text{ popř. } e = \frac{\sqrt{u} \cdot 10^{-2}}{\sqrt{2k-5}}. \quad (4.26)$$

Systematická chyba optického dostředovače, způsobená jeho nepřesnou rektifikací, se prakticky vyloučí tím, že na obou koncových bodech se použije stejného teodolitu, postaveného zhruba ve stejné výšce a orientovaného do stejného směru (na vzdálený bod nebo ve směru měřené délky). Dostředění tedy probíhá pouze v jedné poloze optického dostředovače (na obou koncových bodech stejné), čímž se dosáhne stejné systematické chyby v centraci na obou koncových bodech.



Obr.10 Systematická chyba v centraci

Ta se v měřené délce neprojeví (obr.10). Z výše uvedeného požadavku plyne, že při použití dvou teodolitů (současné měření na jednu lať = zrychlení měření) je nutné volit sudý počet článků, aby na koncových bodech byl stejný teodolit.

Vliv náhodné odchylky v dostředění se sníží novou nezávislou centrací na koncových bodech při druhém měření.

Kolmost lať na záměru se dosahuje cílením kolimátoru lať na levý nosník teodolitu.

Pro eliminaci **vlivu teploty na délku lať** se měří teplota vzduchu u každého článku.

Přesnost Adámkovy metody lze charakterizovat směrodatnou odchylkou σ_d jednou měřené délky:

$$\sigma_d^2 = \frac{d^2}{2l^2} \cdot \sigma_l^2 + \frac{d^4}{l^2 \cdot \rho^2 \cdot 2^3 \cdot (n-1)^3} \cdot \sigma_\delta^2 + (n-1)^2 \cdot \sigma_{\Delta t}^2 + 2 \cdot \sigma_e^2, \quad (4.27)$$

kde d je určovaná vzdálenost,

l - délka základnové lať (2 m),

σ_l - směrodatná odchylka délky základnové lať (kalibrace $\sigma_l = 5 \cdot 10^{-6}$ m),

σ_δ - směrodatná odchylka paralaktického úhlu,

$\sigma_{\Delta t}$ - směrodatná odchylka v určení tloušťky sklíčka ($\sigma_{\Delta t} = 1 \cdot 10^{-5}$ m),

σ_e - směrodatná odchylka v centraci na koncových bodech ($\sigma_e = 3 \cdot 10^{-4}$ m, náhodná složka),

n - počet bodů (koncových + mezibodů, tedy $n-1$ je počet článků).

Pro krátké vzdálenosti (v současnosti prakticky výhradně) se 1. a 3. člen rovnice (4.27) neuplatní a vztah se zjednoduší na tvar:

$$\sigma_d^2 = \frac{d^4 \cdot \sigma_\delta^2}{l^2 \cdot \rho^2 \cdot 8 \cdot (n-1)^3} + 2 \cdot \sigma_e^2. \quad (4.28)$$

Délka se měří dvakrát, nejlépe „tam“ a „zpět“ se dvěma základnovými latěmi. Přesnost průměrné délky se potom vypočte ze vztahu:

$$\sigma_{d\varnothing} = \sigma_d / \sqrt{2}.$$

Pro představu o přesnosti uvedených postupů paralaktického měření délek je v tab.4.2 provedeno jejich porovnání pro délky 10 m a 100 m.

Tab.4.2 Směrodatné odchylky paralakticky měřené délky (jednou měřené)

Metoda	M ě ř e n á d ě l k a					
	10 m			100 m		
	(1) [mm]	(2) [mm]	(3) [mm]	(1) [mm]	(2) [mm]	(3) [mm]
Lať na konci	0,02	0,31	0,31	0,25	31,42	31,42
Lať uprostřed	0,02	0,11	0,11	0,25	11,11	11,11
Adámkova metoda				0,18	0,99	1,01

Sloupec (1) ukazuje vliv chyby v určení délky základnové latě ($\sigma_l = 5 \cdot 10^{-6}$ m), sloupec (2) vyjadřuje vliv chyby v měření paralaktického úhlu ($\sigma_\delta = 0,4$ mgon), což odpovídá úhlu měřenému v jedné PLJ a sloupec (3) udává celkový vliv obou složek. Pro Adámkovu metodu se pro celkový vliv uvažuje $\sigma_{\Delta t} = 1 \cdot 10^{-5}$ m, $\sigma_e = 3 \cdot 10^{-4}$ m a počet článků 5.

• Vady základnové latě

Při paralaktickém měření délek mohou nepříznivě ovlivnit výslednou přesnost především vady základnové latě, které mají systematický charakter. Proto musí být základnová lať použitá pro přesné práce v inženýrské geodézii kalibrována, musí být určena její podélná excentricita, nekolmost kolimátoru k lati a koeficient teplotní roztažnosti invaru. Základnová lať může mít následující vady:

Nesprávná délka základnové latě

Výrobní tolerance je $5 \cdot 10^{-5}$ m, která se může používáním zvětšit. Pro přesné práce se délka určuje kalibrací na komparátoru se směrodatnou odchylkou $\sigma_l = 5 \cdot 10^{-6}$ m, přičemž pro praxi se uvažuje hodnota $\sigma_l = 1 \cdot 10^{-5}$ m. Jedná se o systematickou chybu stálou (co do velikosti i znaménka), vztaženou k teplotě latě při kalibraci.

Změna délky základnové latě s teplotou

Jedná se o změnu délky latě, způsobenou rozdílnými teplotami při měření a při kalibraci latě. Přestože koeficient teplotní roztažnosti invaru α je velmi malý (od 0 do $2,5 \cdot 10^{-6}$ m), je nutno pro přesná měření zavádět opravenou délku základnové latě:

$$l = l_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (t - t_0)] . \quad (4.29)$$

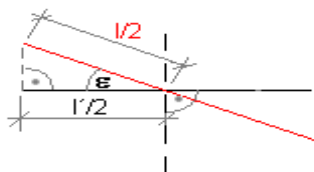
Podélná excentricita základnové latě

Jedná se o vadu způsobenou tím, že svislá rovina proložená cílovými terči, neprochází svislou osou otáčení základnové latě (obr.8). Podélná excentricita se zjišťuje obdobně jako součtová konstanta dálkoměrné soupravy, tj. měří se délka d (kolem 10 m), a to jednak celá a dále rozdělená na dvě poloviny ($d_1 + d_2$). Potom se podélná excentricita e vypočte ze vztahu $e = d - (d_1 + d_2)$. Tato chyba se projevuje v měřené délce plnou hodnotou, není-li eliminována postupem měření (oboustranná lať).

Hodnotu podélné excentricity lze určit též z rozdílu délky fixované dvěma stativy s trojnožkami, měřené na líc a posléze po přetočení na rub kalibrované základnové latě, po zavedení opravy z tloušťky sklíček.

Nekolmost základnové latě na měřenou délku

Jde o vadu způsobenou nekolmostí osy kolimátoru na základnovou lať, přičemž výrobní tolerance je udávána hodnotou 14 mgon. Vada způsobuje naměření větší délky (lať se jeví pod menším úhlem). Oprava délky o_d se vypočte z přibližného vzorce (4.30), odvozeného z obrázku č.11:



Obr.11 Nekolmost latě k záměře

$$l' = l \cdot \cos \varepsilon,$$

$$o_d = d - d' = \frac{l}{2} \cdot \cos \varepsilon \cdot \cotg \frac{\delta}{2} - \frac{l}{2} \cdot \cotg \frac{\delta}{2}.$$

Po dosazení za $\cotg \frac{\delta}{2} = \frac{2d}{l}$, pokrácení a náhradě $\cos \varepsilon$ prvními dvěma členy řady se obdrží vzorec:

$$o_d \approx d \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2\rho^2} - 1\right) \approx -d \cdot \frac{\varepsilon^2}{2\rho^2}. \quad (4.30)$$

Protože nejčastěji používaná základnová lať Zeiss Bala má kolimátor umístěný excentricky ($e = 57\text{mm}$), cílí se u krátkých vzdáleností na odpovídající nosník teodolitu (stejná excentricita). Případnou opravu délky, způsobenou excentricitou kolimátoru lze určit ze vztahu, vycházejícího ze vzorce (4.30), kde $\varepsilon/\rho = e/d$:

$$o_d \approx -d \cdot \frac{\varepsilon^2}{2\rho^2} \approx -\frac{e^2}{2d}. \quad (4.31)$$

Nevodorovnost základnové latě

Jedná se o vadu způsobenou nesprávně rektifikovanou krabicovou libelou na lati, která má stejný důsledek jako nekolmost základnové latě k záměře (vzorec 4.30). Vodorovnost základnové latě lze však snadno kontrolovat vodorovnou ryskou ryskového kříže urovnaného teodolitu (přetočením z levé cílové značky na pravou).

Vybočení základnové latě z přímky (příčná výstřednost e_q)

Jde o vadu, způsobenou nesymetričností cílových značek vzhledem k ose otáčení základnové latě, která má stejný důsledek jako excentrický kolimátor při cílení na osu teodolitu (vzorec 4.31).

Všechny uvedené vady a opravy mají systematický charakter. První a třetí jsou konstantní, další tři jsou proměnné velikosti, ale jednostranné (vždy naměřenou vzdálenost zvětšují) a druhá má proměnnou velikost i znaménko.

4.3.2.2. Dvojobrazové dálkoměry

Princip dvojobrazových dálkoměrů byl vysvětlen v předmětu Geodézie a je uveden ve skriptech či jiné odborné literatuře. V současnosti se dvojobrazové dálkoměry prakticky nepoužívají, neboť byly vytlačeny elektronickými dálkoměry, které jsou řádově přesnější a mnohonásobně rychlejší.

4.3.2.3. Ryskové dálkoměry

Princip ryskového dálkoměru byl opět uveden v předmětu Geodézie, kde je i obsahem skript. Je velmi nenáročný, ale málo přesný (řádově v decimetrech), čemuž odpovídá i jeho využití v inženýrské geodézii (např. pro určení délky záměry při nivelaci).

4.3.2.4. Trigonometrické určování délek

Princip trigonometrického určování délek vychází z předpokladu známé délky (měřené nebo vypočtené ze souřadnic), ze které se odvodí určovaná vzdálenost pomocí úhlového měření. Zpravidla se používá nejjednodušších obrazců, kterými jsou trojúhelník nebo čtyřúhelník. Před zavedením elektronických dálkoměrů, kdy přesné určení délek (zvláště větších) bylo značně komplikované, byl tento postup s výhodou používán. Vycházelo se při tom zpravidla ze známých bodů, daných v souřadnicích, z nichž byla vypočtena výchozí délka.

V současnosti má trigonometrické určování vzdáleností význam především při měření na nepřístupné body z délkově určené základny, kdy nelze využít možnosti měření délek

bezhranolově nebo na odrazné štítky (např. věž kostela, tovární komín apod.). Zde se tedy používá trojúhelníku.

Čtyřúhelníka se nejčastěji používá v Inženýrské geodézii pro určení délky druhé úhlopříčky, když první je přímo měřena a z jejich koncových bodů se měří osnovy vodorovných směrů a zenitových úhlů (při prostorovém řešení) nebo pro určení protilehlé strany (tzv. Hansenova úloha).

První případ bude podrobně řešen v předmětu „Inženýrská geodézie 2“, a to včetně hodnocení přesnosti (1. ročník magisterského studia), druhým případem se podrobně zabývá předmět „Kontrolní měření“ (rovněž 1. ročník magisterského studia), kde se pro velmi přesná strojírenská měření určuje délka základny pro protínání vpřed z úhlů ze známé, velmi přesně dané délky. Tou je zpravidla invarová základnová lať nebo invarová lať nivelační, umístěná do vodorovné polohy. Tímto postupem lze dosáhnout přesnosti určení prostorové polohy bodů na strojírenských objektech v desetinách milimetrů.