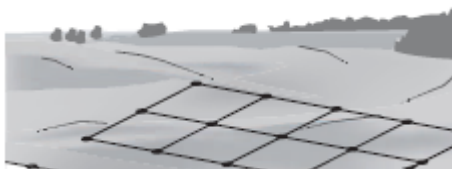


URČENÍ VODOROVNÉ A OBECNÉ ROVINY

(místopisný popis: park v ulici Nikoly Tesly)

Poslední úprava: 21.10.2020 15:22

Úkolem je vypočítat pro zaměřený rovinatý terén: 1. vodorovnou rovinu tak, aby celkový objem zemních prací byl stejný (násyp = výkop), 2. najít obecnou rovnici roviny, která dobře aproximuje zaměřený terén. Zadané území (ul. Nikoly Tesly, obr. 1) se zaměří polární metodou s výškami z jednoho přechodného stanoviště pomocí dat měření do vnitřní paměti výškovému připojení se použijí Charakter terénu (pravidelný, k zaměření území pravoúhlou sítí (podrobné body terénu) se určí krokováním. Musí se zvolit tolik podrobných bodů, aby plocha tvořená rovinnými trojúhelníky se co nejlépe přimykala skutečnému terénu (cca 60 bodů).



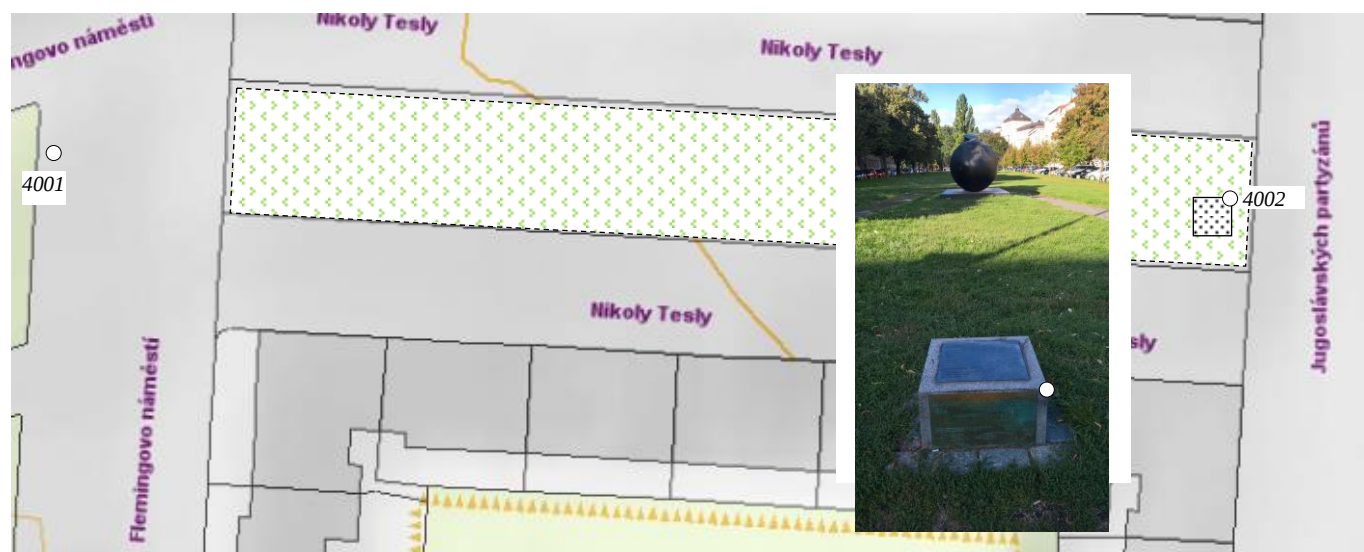
totální stanice s ukládáním přístroje (k polohovému a dva body uvedené v tab.). málo členitý) umožňuje zvolit (čtvercovou); uzlové body

Souřadnice (S-JTSK) volného polárního stanoviště se určí podobnostní transformací. Transformační klíč se vypočte pomocí identických bodů 4001, 4002, které byly učeny pomocí technologie GNSS v síti referenčních stanic CZEPOS ([protokol](#)). Souřadnice zaměřených podrobných bodů terénu se určí výpočtem polární metody (rajón - orientace na body 4001, 4002, 60). Vodorovné směry, zenitové úhly a šikmé délky se měří pomocí totální stanice v jedné poloze dalekohledu vyjma orientací (měří se v obou polohách). Všechna měřená data se ukládají do vytvořené zakázky v přístroji.

Přístroje a pomůcky: totální stanice TC403, stativ, výtyčka s odrazným hranolem.

Souřadnicový systém: S-JTSK, výškový systém: Bpv.

Bod	Y	X	H	Poznámka
4001	744 596,519	1 040 744,830	211,595	Bod v chodníku
4002	744 431,382	1 040 750,590	208,940	Horní roh pamětní mramorové desky
60	744 652,40	1 040 710,65		ZhB



Obr.1 Zájmová lokalita

Nadmořská výška (B_{pv}) přechodného stanoviska (= středu točné osy dalekohledu přístroje) je

$$1. H_{1P} = H_A - \Delta h_A + h_r$$

$$2. H_{2P} = H_B - \Delta h_B + h_r$$

Výsledná výška H_P je průměr. Stejným způsobem se určí nadmořská výška podrobných bodů

H_i = H_P + Δh_i – h_r, kde h_r je výška odrazného hranolu nad terénem, převýšení Δh (výškový rozdíl) se určí podle poznámky.

POZNÁMKA. Měřené délky se opravují o fyzikální redukce (z teploty a tlaku vzduchu), o matematické redukce (do vodorovné roviny, z nadmořské výšky) a o redukce do zobrazovací roviny S-JTSK.

Postup redukce:

1. Vodorovná délka a výškový rozdíl podle obecných vzorců jsou

$$d_h = d_s \sin (z + \rho - \varphi)$$

$$\Delta h = d_s \cos (z + \rho - \varphi / 2) .$$

nebo po úpravě (linearizaci)

$$d_h = Y - AXY$$

$$\Delta h = X + BY^2$$

kde

d_s je měřená šikmá délka

z je měřený zenitový úhel

středový úhel tížnic v gonech $\varphi = 0,00998 \cdot d_s [\text{km}] \cdot \sin z$.

$$X = d_s \cdot \cos z, Y = d_s \cdot \sin z, \text{ obecně } A = \frac{1-k/2}{R}, B = \frac{1-k}{2R} .$$

Refrakční úhel se v této úloze položí $\rho = 0$, pak také refrakční koeficient $k = 0$ a pro střední poloměr Země $R = 6\,381 \text{ km}$ je $A = \frac{1}{R} = 1,56715 \cdot 10^{-7} [\text{m}^{-1}]$, $B = \frac{1}{2R} = 7,83576 \cdot 10^{-8} [\text{m}^{-1}]$.

2. Redukce z nadmořské výšky. Průměrná nadmořská výška zájmové lokality je $H = 210 \text{ m}$, pak

$$\Delta D_2 = \left(\frac{R}{R+H} - 1 \right) \cdot 10^6 \text{ ppm} = -32,9 \text{ ppm} .$$

3. Redukce do zobrazovací roviny S-JTSK. Délkové zkreslení je

$$\Delta D_3 = (m-1) \cdot 10^6 = -95,8 \text{ ppm} ,$$

kde $m = 0,999904182$ je měřítko zobrazení a vypočte se pro střed spojnice AB

$$Y = 744\,513 \quad X = 1\,040\,747 .$$

Výsledný měřítkový koeficient q se nastaví v Gromě před zpracováním zápisníku měření (v totální stanici nastavit při měření 1)

$$q = 1 + (\Delta D_2 + \Delta D_3) \cdot 10^{-6} = \mathbf{0,9998713} (-128,7 \text{ ppm}).$$

OBSAH ÚLOHY: technická zpráva (obsahuje popis prací v terénu a kancelářských prací, použité přístroje, zhodnocení výsledků, datum a podpis!), zápisník měření (výstupní soubor nezpracovaných dat z geodetického systému Groma uložený do tabulky *.xls,). Výpočet souřadnic stanoviště P ručně na kalkulačce nebo v Matlabu. V nezbytné míře uvést obecný postup a vzorce. Následující řešení souřadnic jsou ekvivalentní:

a) jako vetknutý PP (podobnostní [transformace](#)), osa $+x$ pomocné soustavy II se vkládá do první polygonové strany.

b) sólo bod (volné polární stanoviště) pomocí **podobnostní** transformace ([příklad](#)). Souřadnice v soustavě II se vypočtou převodem polárních souřadnic (měřené délky a směry) na kartézské (soustava má počátek v bodě P , osa $+x$ je dána postavením nuly na děleném kruhu přístroje) podle obecných vzorců $y = s \sin \psi$, $x = s \cos \psi$, kdy souřadnice stanoviště P jsou $y_P = x_P = 0$ (lze zvolit i vhodné nenulové konstanty).

Dále bude úloha obsahovat seznam vypočtených souřadnic a nadmořských výšek podrobných bodů terénu + přiložit protokol o výpočtu. Při realizaci výpočtů v Gromě uložit jako *.xls a zařadit do úlohy, dále uložit do textového souboru *.txt (CB Y X H) bez připojovacích bodů a stanoviště a poslat na svůj e-mail. **Seznam souřadnic a nadmořských výšek bodů vypočtené obecné roviny, její rovnici, opravy výšek bodů terénu z vyrovnání (kontrola $\sum v = 0$) a veličinu d , viz dále (souřadnice uložit rovněž do textového souboru *.txt), výpočet roviny se provede v Matlabu + přiložit výpočetní skript.** Soubory souřadnic se použijí při zpracování v programu [Atlas DMT](#). Měřický náčrt (nejlépe obrázek z Gromy ve vhodném měřítku na celý list papíru A4, kde budou uvedena čísla podrobných bodů pořadovým číslem, vyznačen obvod zaměřeného území, jeho velikost a výměra, nakreslena měřická síť střídavou čarou, směr k severu a dole uprostřed měřítko náčrtu, v pravém dolním rohu se uvede popisové pole - název obce (Praha 6), katastrálního území (Dejvice), souřadnicový a výškový systém, datum měření, složení měřické skupiny). Výpočet srovnávací roviny v programu Groma (výkres navržené trojúhelníkové sítě, hodnota přibližné nadmořské výšky srovnávací roviny se rovná průměru nadmořských výšek zaměřených podrobných bodů terénu, protokol o výpočtu kubatur), souřadnice bodů nulové čáry, grafické znázornění nulové čáry (dohromady s trojúhelníkovou sítí), bilance objemu zemních prací v části násypové a v části výkopové na základě nového výpočtu objemu (obě části jsou omezeny nulovou čarou a jejich rozdíl musí být nulový). Vypočtené souřadnice a výšky se zaokrouhlují na 3 desetinná místa.

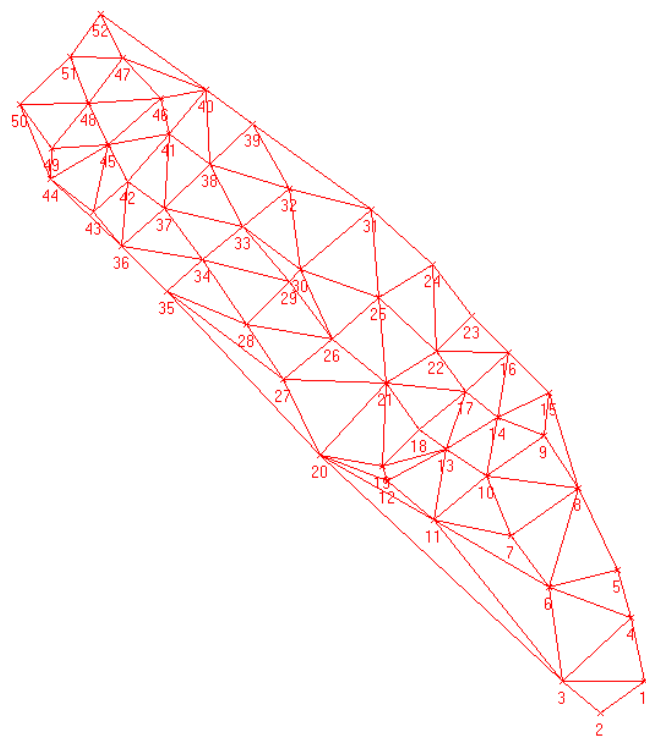
POZNÁMKA. Rozdíl mezi délkou spojnice bodů A, B v S-JTSK (ze souřadnic) a délkou určenou v místní soustavě (ze souřadnic), nesmí překročit mezní odchylku 0,10 m.

1. Výpočet vodorovné roviny v kostce (obecné řešení)

Podkladem pro výpočet je nepravidelná trojúhelníková síť (*Triangulated Irregular Network*, ve zkratce TIN) vzniklá spojením sousedních podrobných bodů zaměřených polohově (polární metoda) a výškově (trigonometricky). Nepravidelná trojúhelníková síť (obr. 2) se vytvoří ručně. Při automatizovaném zpracování pomocí softwaru se používá Delaunayova triangulace.

POZNÁMKA. Trojúhelníková síť rozkládá dané území na konečný počet buněk, které se nepřekrývají. Hrany spojující jednotlivé body se neprotínají, každému bodu trojúhelníkové sítě přísluší v případě této úlohy nebo digitálního modelu terénu jedna hodnota (nadmořská výška). Výškové hodnoty na hranách a uvnitř buněk lze určit lineární interpolací – proložením roviny třemi body, které tvoří trojúhelníkovou buňku. Na dané množině bodů lze vytvořit mnoho trojúhelníkových sítí. Obecně platí, že všechny takové trojúhelníkové sítě mají stejný počet buněk $(2n - 2 - k)$, kde n je počet bodů trojúhelníkové sítě, k je počet vnějších hran, které tvoří konvexní (vypouklou) obálku množiny vstupních bodů. Podle obr. 2 je $n = 52$, $k = 20$, pak počet buněk je 82. Používá se taková síť, jejíž trojúhelníkové buňky mají co nejkratší hrany. Trojúhelníková buňka patří do Delaunayovy sítě, jestliže kružnice opsaná nad touto buňkou neobsahuje uvnitř žádný jiný bod ze vstupní množiny bodů. Pokud nastane případ, že opsaná kružnice obsahuje další body, dojde ke změně hran.

Delaunayovu triangulaci lze provést také v Matlabu pomocí funkce **TRI = delaunay(X,Y)**, kde X a Y jsou sloupcové vektory. Matice TRI představuje množinu trojúhelníků tvořících triangulaci. Matice má velikost $mtri \times 3$, kde $mtri$ je počet trojúhelníků. Každý řádek TRI určuje trojúhelník definovaný indexy vzhledem k bodům.



Obr. 2 Ukázka TIN

Z hlediska prostorového je celé území rozděleno na kolmé trojboké hranoly (výšky bočních rovnoběžných hran jsou nadmořské výšky podrobných bodů, vrchní podstava každého hranolu je šikmo seříznutá rovinným trojúhelníkem, resp. rovinou nerovnoběžnou s podstavou, objem hranolu je $V = P H_{\Delta}$, kde P obsah podstavy (výměra trojúhelníku), H_{Δ} je střední výška (= průměr).

Rovnice vodorovné roviny je $z = A$. Konstanta A představuje úsek na ose z , její přibližná hodnota se určí z průměru nadmořských výšek podrobných bodů terénu, $A_0 = \frac{\sum H}{n}$. Takto určená nadmořská výška

vodorovné roviny ovšem nesplňuje podmínku, aby součet objemu mezi terénem a srovnávací rovinou byl nulový. Z této podmínky se určí korekce δA přibližné hodnoty A_0 nadmořské výšky roviny. Platí $\sum V = \sum P(A_0 + \delta A - H_{\Delta}) = 0$ (výpočet probíhá po jednotlivých trojúhelnících). Odtud je

$\delta A = \frac{-\sum P(A_0 - H_{\Delta})}{\sum P} = \frac{-\sum V_0}{\sum P}$, kde P je výměra trojúhelníka (obsah dolní podstavy hranolu) a vypočte

se jako determinant $2P = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \sum_1^3 x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$, H_{Δ} je střední výška hranolu, která se vypočítá

jako průměr z nadmořských výšek vrcholů trojúhelníka.

Výsledná nadmořská výška vodorovné roviny je $z = A_0 + \delta A$.

POZNÁMKA. Výslednou výšku lze určit přímo ze vztahu $z = \frac{\sum P H_{\Delta}}{\sum P}$, protože součet rozdílů objemů mezi rovinou a hranolem musí být podle zadání nulový $\sum V = 0$; jeden rozdílový objem je $\Delta V = P(z - H_{\Delta})$.

Vypočet souřadnic lomových bodů nulové čary (lomená čára, která představuje průsečnici srovnávací roviny s terénem, některé trojúhelníky jsou částečně ve výkopu a částečně v násypu). Souřadnice těchto bodů se určí jako body na pevné měřické přímce (staničení se vypočte z podobnosti trojúhelníků).

Ukázka výpočtu pomocí programu Groma

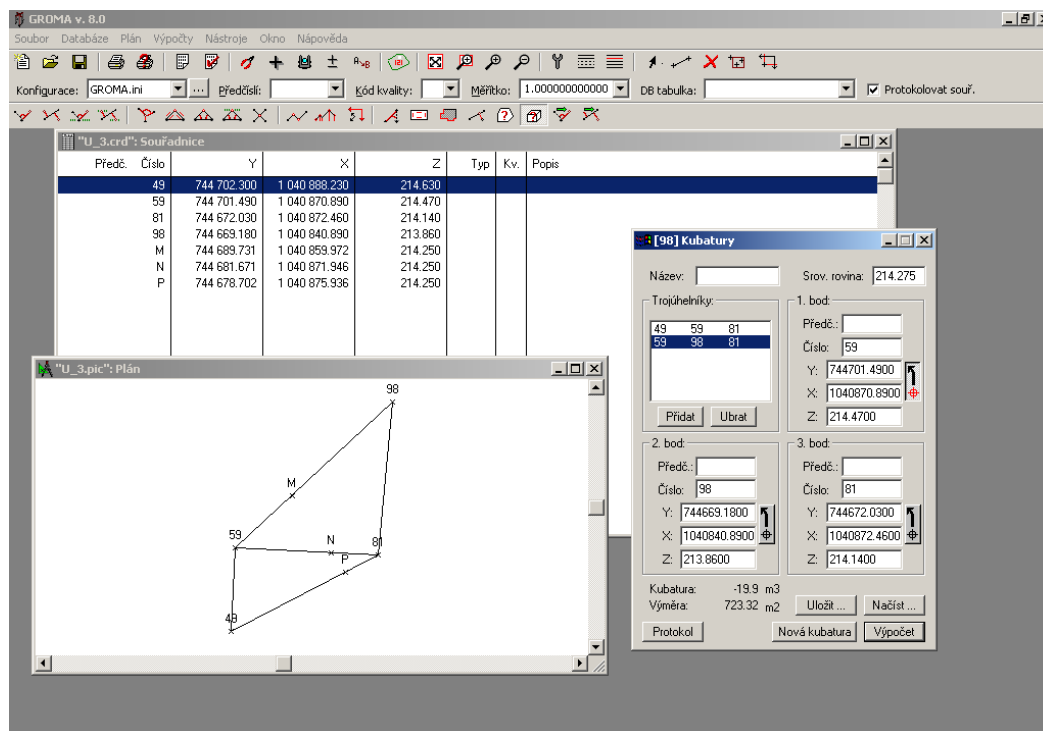
Vypočtou se souřadnice a výšky zaměřených bodů (49, 59, 81, 98) – obr. 3. V grafické části starší verze programu se vytvoří trojúhelníková síť ručně (v tomto příkladu sestává pouze ze dvou trojúhelníků). V nové verzi (od 11.x) se trojúhelníková síť vytváří automatizovaně

http://groma.cz/cz/man/calc_volume.html

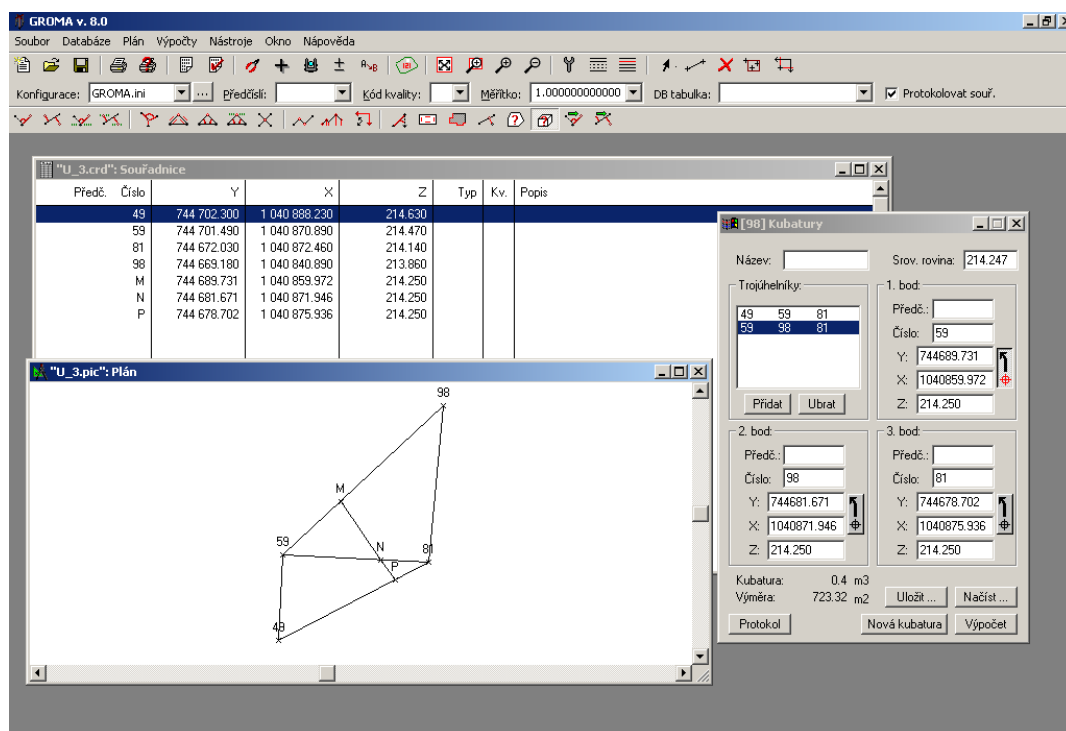
Vlastní výpočet srovnávací roviny se provede ve výpočtech (Kubatury), ilustrativní příklad je na obr. 3. Nejdříve se doplní přibližná výška srovnávací roviny $A_0 = 214,275$ (průměr). Z grafické části programu

(nebo ze seznamu souřadnic) se zadají postupně jednotlivé trojúhelníky. Při automatickém výpočtu se vloží celá triangulace. Po výpočtu je $\Sigma V_0 = -19,9$ (má být nula). Korekce $\delta A = \frac{-19,9}{723,32} = -0,028 \text{ m}$.

Nadmořská výška srovnávací roviny je $z = 214,247 \text{ m}$. Změní se výška srovnávací roviny na hodnotu $214,247 \text{ m}$ a provede se ještě druhý výpočet: $\delta A = \frac{+0,4}{723,32} = +0,00055 \text{ m}$ (obr. 4). Konečný výsledek je $z = 214,247 \text{ m}$.



Obr. 3 Seznam souřadnic zaměřených bodů, výpočet kubatur pro přibližnou výšku srovnávací roviny



Obr. 4 Druhý výpočet kubatur pro vypočtenou výšku srovnávací roviny

Z pracovních kót $v_i = z - H_i$, (+v nasypat, -v odkopat) zjistíme snadno v grafickém náhledu (obr. 5), které strany trojúhelníků protíná nulová čára – sousední kladné a záporné hodnoty pracovních kót.

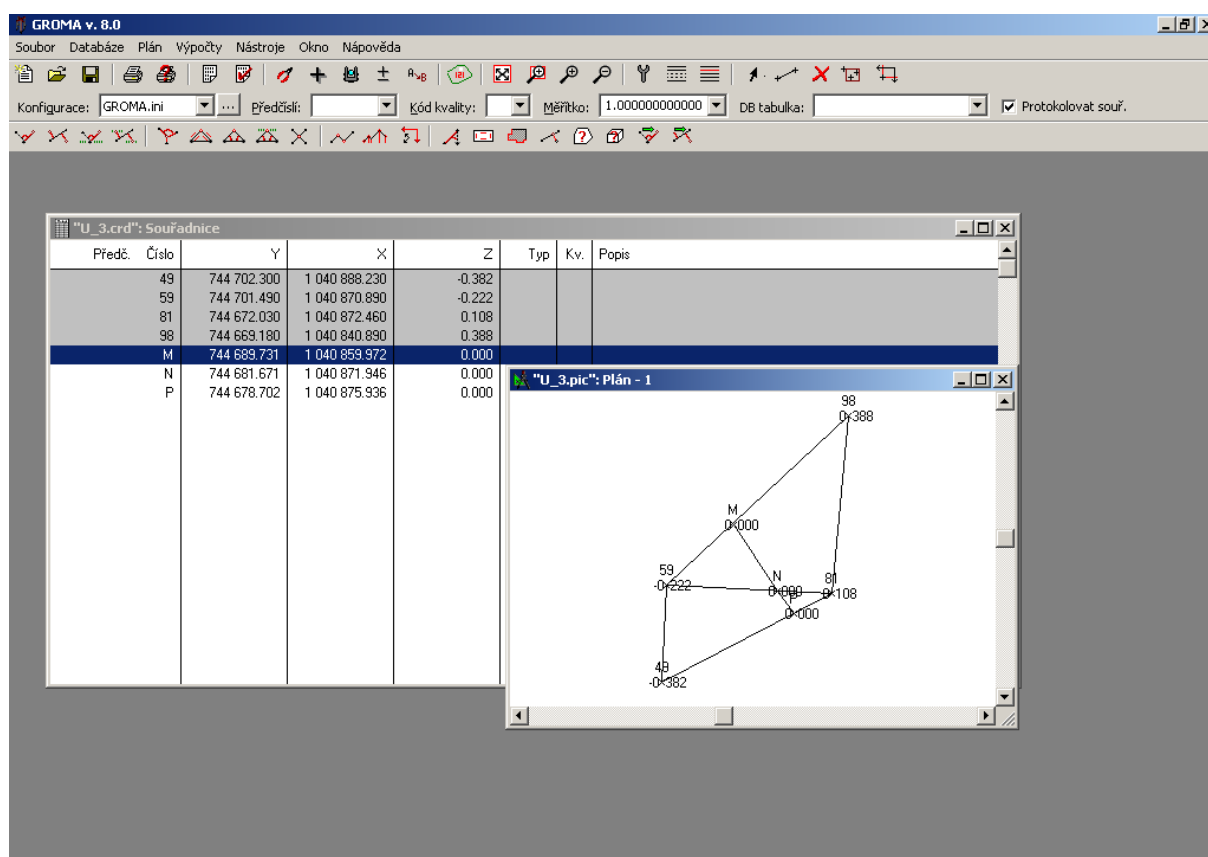
Pracovní kóty se vypočtou pro každý podrobný bod pomocí hromadné změny v seznamu souřadnic pro souřadnici Z (obr. 6).

Pro bod M nulové čáry platí z podobnosti trojúhelníku:

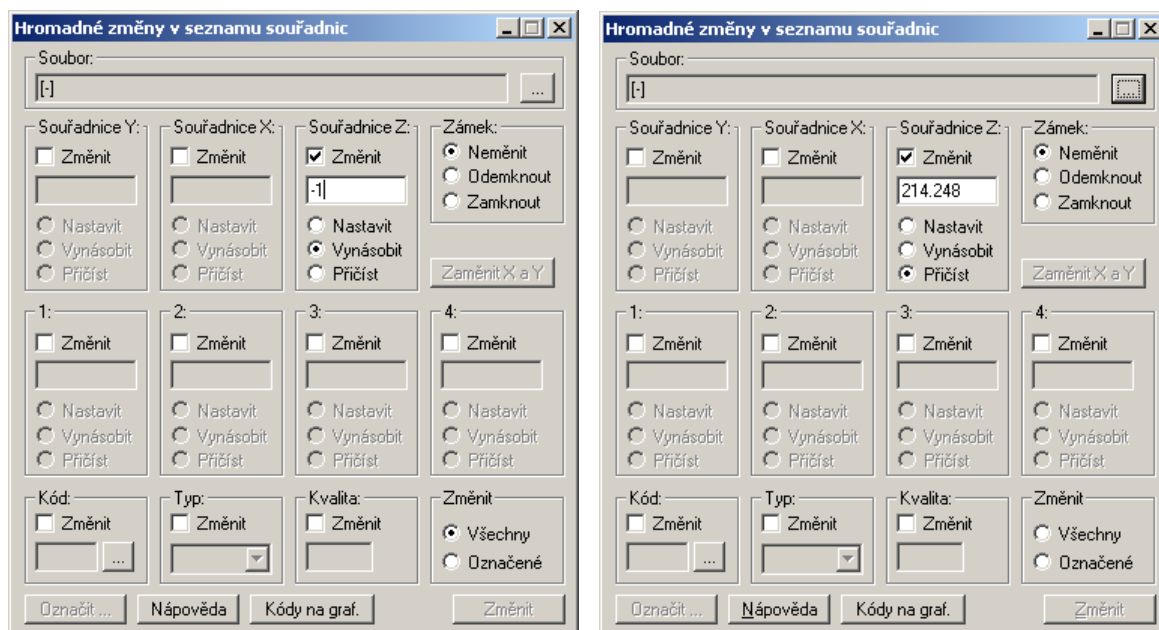
$$s_{59,M} = \frac{s_{59,98}}{\Delta v_{59,98}} \Delta v_{59,M} = \frac{44,090}{0,388 + 0,222} 0,222 = 16,046\text{m}$$

$$Y_M = Y_{59} + s_{59,M} \Delta Y_{59,98}/s_{59,98} = 744\,701,49 + 16,046 (-32,31)/44,090 = 744\,689,731$$

$$X_M = X_{59} + s_{59,M} \Delta X_{59,98}/s_{59,98} = 1\,040\,870,89 + 16,046 (-30,00)/44,090 = 1\,040\,859,972.$$



Obr. 5 Pracovní kóty a souřadnice bodů nulové čáry (M , N , P)



Obr. 6 Výpočet pracovních kót

Výpočet obecné roviny (metodou nejmenších čtverců)

Body terénu se proloží metodou nejmenších čtverců (MNČ) rovina, jejíž rovnice má tvar

$$z = ax + by + c.$$

Pro soubor zaměřených bodů terénu není rovnice obecně splněna. K nadmořské výšce každého zaměřeného bodu terénu ($z = H$) se připojí oprava

$$z_i + v_i = ax_i + by_i + c, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$v_i = ax_i + by_i + c - z_i \dots \text{rovnice oprav} \quad (1)$$

kde

neznámé konstanty a, b, c se vypočtou

$x_i, y_i, (z_i + v_i)$ jsou souřadnice bodu, který leží v rovině.

Opravy splňují podle MNČ tři matematické podmínky. Z nichž pro jednu platí $\sum v = 0$, pak s využitím (1) je

$$c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y} \dots \text{úsek na ose } z$$

kde souřadnice $\bar{x} = \sum x/n$ je průměr, analogicky pro ostatní souřadnice.

Konstanta c se dosadí do hořejší rovnice oprav (1) a po úpravě je

$$v_i = a(x_i - \bar{x}) + b(y_i - \bar{y}) - (z_i - \bar{z}) = a x'_i + b y'_i - z'_i, \quad (2)$$

kde $x'_i = x_i - \bar{x}$ (kontrola $\sum x'_i = 0$), y'_i, z'_i jsou redukované souřadnice.

Systém rovnic oprav (2) se řeší podle podmínky metody nejmenších čtverců (MNČ)

$$\sum v v = \sum (a x'_i + b y'_i - z'_i)^2 = \min.$$

Řešením podmínky MNČ dostaneme dvě lineární rovnice (normální rovnice) pro neznámé a, b

$$\begin{bmatrix} \sum x' x' & \sum x' y' \\ \sum x' y' & \sum y' y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x' z' \\ \sum y' z' \end{bmatrix},$$

kde $\sum x' x' = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2$, $\sum x' y' = x_1' y_1' + x_2' y_2' + \dots + x_n' y_n'$, atd.

Řešení soustavy podle Cramerova pravidla je

$$a = \frac{(\sum x' z') (\sum y' y') - (\sum x' y') (\sum y' z')}{(\sum x' x') (\sum y' y') - (\sum x' y')^2},$$

$$b = \frac{(\sum x' x') (\sum y' z') - (\sum x' z') (\sum x' y')}{(\sum x' x') (\sum y' y') - (\sum x' y')^2}.$$

Následuje výpočet oprav nadmořských výšek bodů terénu podle (1) a jejich připojením k nadmořským výškám dostaneme body roviny $x_i, y_i, \hat{z}_i$, kde $\hat{z}_i = z_i + v_i$. Vzdálenost roviny od zvlněného terénu lze definovat pomocí vztahu $d = \sqrt{\sum v v}$, pro malé hodnoty d se terén blíží rovině (další porovnání terén versus rovina proběhne v programu Atlas DMT).

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ
KATEDRA SPECIÁLNÍ GEODÉZIE
STUDIJNÍ PROGRAM: GEODÉZIE A KARTOGRAFIE

Název předmětu

GEODÉZIE 3

Úloha
U_3

Název úlohy
URČENÍ VODOROVNÉ A OBECNÉ ROVINY

2020/2021	3. semestr	Studijní skupina	Zpracoval:	Datum	Klasifikace
-----------	------------	------------------	------------	-------	-------------