

## Vyrovnání sítě - USP

Parametry polohové sítě

Počet bodů v síti: 4 (102, 104, 105, 106)

Počet neznámých: 12 (souř. + or. úhly, všechny body sítě jsou určované)

Počet měřených směrů: 10

Počet měřených délek: 5; počty měřených směrů a délek jsou bez spojnice 105-102, kterou lze realizovat pouze při excentrickém postavení přístroje a cíle na stanovisku 105, a pak ji zařadit do sítě

Rozměr matice plánu: 15×12 (hodnota matice 9)

Počet nadbytečných měření: 6 (počet měření - hodnota matice plánu)

Způsob připojení sítě (volná): pevný bod (105) a směrník (spojnice 105 - 102)

Použitý přístroj: Leica TS06 (přesnost  $\sigma_{Hz} = 0,6$  mgon,  $\sigma_d = 1,5$  mm + 2 ppm)

Apriorní hodnota  $\sigma_0 = 1$ , váhová matice je diagonální s reciprokými hodnotami veličin  $\sigma_d^2$ ,  $\sigma_{Hz}^2$

Pracovní jednotky: metry, radiány.

Výchozí obecné rovnice pro vyrovnání zprostředkujících měření jsou nelineární

$$s_{12} - \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 0, \quad \psi_{12} - (\arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - o_1) = 0$$

Obecný maticový zápis + linearizace

$$\begin{aligned} \mathbf{L} + \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{X}_0 + \mathbf{h}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{A}\mathbf{h} - (\mathbf{L} - \mathbf{F}(\mathbf{X}_0)), \\ \mathbf{v} &= \mathbf{A}\mathbf{h} - \mathbf{l} \end{aligned}$$

sloupcové vektory po řadě jsou:  $\mathbf{L}$  měření,  $\mathbf{v}$  opravy měření (splňují  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$ ),  $\mathbf{X}_0$  přibližné hodnoty neznámých (= počáteční aproximace souřadnic všech bodů sítě, orientační posuny se položí nule),  $\mathbf{h}$  přírůstky přibližných hodnot souřadnic a vyrovnané hodnoty orientačních posunů,  $\mathbf{l}$  redukovaná měření.

Matice plánu  $\mathbf{A}$  je matice parciálních derivací hořejších rovnic podle jednotlivých neznámých (Jacobiova matice), rozměr matice plánu, ideálně měřeno vše na všech bodech sítě, je  $r \times 3k$ , kde  $k$  je

počet bodů sítě, počet měření v síti je  $r = \frac{3}{2}k(k-1)$

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{X}}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial y_k}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Měřená veličina	Koeficienty u neznámých (prvky matice plánu $\mathbf{A}$ )					Redukovaná měření
	Orientační posun	Stanovisko		Cíl		
		$x_1$	$y_1$	$x_2$	$y_2$	
Směr	-1	$\frac{y_2^0 - y_1^0}{s_0^2}$	$-\frac{x_2^0 - x_1^0}{s_0^2}$	$-\frac{y_2^0 - y_1^0}{s_0^2}$	$\frac{x_2^0 - x_1^0}{s_0^2}$	$(\psi_{12} - \varphi_{12}) < 0$
Délka	0	$-\frac{x_2^0 - x_1^0}{s_0}$	$-\frac{y_2^0 - y_1^0}{s_0}$	$\frac{x_2^0 - x_1^0}{s_0}$	$\frac{y_2^0 - y_1^0}{s_0}$	$s_m - s_0$

$x^0, y^0$  přibližné souřadnice

$s_m$  rovinná délka (měřená délka po redukci)

$s_0$  délka vypočtená z přibližných souřadnic

$\psi_{12}$  měřený směr

$\varphi_{12}$  jižník vypočtený z přibližných souřadnic.

Normální rovnice jsou  $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{h} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ . V případě volných sítí je symetrická matice soustavy normálních rovnic  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$  singulární, její determinant je nulový. Obecné řešení soustavy normálních rovnic (NR), které jsou lineární, se vyjádří jako součet jednoho libovolného řešení NR

(určení tvaru a rozměru sítě) + řešení přidružené homogenní soustavy. Nakonec se toto obecné řešení umístí do soustavy souřadnic pomocí podmínky (pevný bod a směrník).

Řešení homogenní soustavy tvoří podprostor, který má dimenzi 3. Jinými slovy, řešení tvoří lineární kombinace vektorů z nulového prostoru matice plánu  $\mathbf{A} \mathbf{H} = \mathbf{0}$ , kde sloupce  $3k \times 3$  matice  $\mathbf{H}$  tvoří nulový prostor. Hodnota matice plánu je  $3(k-1)$ , matice má tři lineárně závislé sloupce.

V Matlabu se najde jedno partikulární řešení soustavy NR pomocí funkce  $\mathbf{x0} = \mathbf{N} \setminus \mathbf{c}$ , kde  $\mathbf{c} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$ .

Opravy měření jsou nezávislé na řešení NR, pak  $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{l}$  a vyrovnaná měření  $\mathbf{L}_v = \mathbf{L} + \mathbf{v}$ . Nulový prostor je  $\mathbf{H} = \text{null}(\mathbf{A})$ . Výsledné řešení normálních rovnic  $\mathbf{h} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{H} \mathbf{t}$ . Vektor  $\mathbf{t}$  obsahuje koeficienty lineární kombinace (zatím libovolné).

Podmínka na umístění sítě do soustavy souřadnic má tvar (po linearizaci)  $\mathbf{G}^T \mathbf{h} = \mathbf{0}$ . Do této podmínky se dosadí obecné řešení a po úpravě

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T (\mathbf{x}_0 + \mathbf{H} \mathbf{t}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{t} &= -(\mathbf{G}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

nakonec

$$\mathbf{h} = (\mathbf{E} - \mathbf{H} (\mathbf{G}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G}^T) \mathbf{x}_0 = \mathbf{S} \mathbf{x}_0.$$

Vyrovnané souřadnice jsou  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{h}$  a druhý (kontrolní) výpočet oprav  $\mathbf{v}^{\text{II}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{L}$ , ( $\mathbf{v}^{\text{II}} = \mathbf{v}$ ).

Pro umístění sítě v soustavě souřadnic se definují podmínky, kterými lze tuto síť jednoznačně umístit. V našem případě se aplikuje podmínka pevný bod (jsou zachovány souřadnice) a směrník na další bod sítě. Matematická formulace podmínek a matice  $\mathbf{G}$ :

$$(x_1^0 + dx_1) - x_1^0 = 0, \text{ pevný bod}$$

$$(y_1^0 + dy_1) - y_1^0 = 0,$$

$$1. dx_1 = 0,$$

$$2. dy_1 = 0.$$

$$\arctg \frac{(y_2^0 + dy_2) - y_1^0}{(x_2^0 + dx_2) - x_1^0} - \arctg \frac{y_2^0 - y_1^0}{x_2^0 - x_1^0} = 0 \dots \text{orientace sítě}$$

s využitím Taylorovy řady s omezením na lineární členy (příslušné derivace jsou v prvním řádku hořejší tabulky pro cílový bod) je

$$-\frac{y_2^0 - y_1^0}{s_0^2} dx_2 + \frac{x_2^0 - x_1^0}{s_0^2} dy_2 = 0.$$

Po úpravě

$$3. -\sin \varphi_{12} dx_2 + \cos \varphi_{12} dy_2 = 0.$$

Odpovídající matice  $\mathbf{G}^T$  má tvar

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} dx_1 & dy_1 & dx_2 & dy_2 & \dots & dx_k & dy_k & | & o_1 & o_2 & \dots & o_k \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} & \dots & 0 & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Odhad střední chyby jednotkové z oprav se vypočte z obecného vztahu

$$\sigma_0'^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n'}$$

Počet nadbytečných měření (počet stupňů volnosti)  $n' = r - r(\mathbf{A}) = r - 3(k - 1)$ .

Interval spolehlivosti ( $\alpha = 0,05, P = 0,95$ )

$$\sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2}{n'}} \leq \frac{\sigma_0'}{\sigma_0} \leq \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2}^2}{n'}}$$

kde  $\chi_{1-\alpha/2}^2, \chi_{\alpha/2}^2$  jsou kritické hodnoty chí-kvadrát rozdělení pro  $n'$  stupňů volnosti; určí se v Matlabu, funkce **chi2inv(P, n')** vypočte kvantil.

### Testovací příklad pro program v Matlabu (ukázka protokolu o výpočtu v Gromě - upraveno)

```

POLOHOVÉ VYROVNÁNÍ SÍTĚ
=====
Lokalita:
Datum:
PŘIBLIŽNÉ SOUŘADNICE:
=====

```

Bod	Y	X	Char	Délka	Směrů
102	845560.365	998311.673	Pevný směrník	0	2
104	845324.623	997688.951	Volný	1	3
105	845703.661	997183.688	Pevný bod	1	2
106	845994.340	997338.253	Volný	3	3

```

-----
MĚŘENÉ DÉLKY:
=====
Stanovisko: 104

```

Cíl	Délka [m]	$\sigma$ [mm]
102	665.766	2.83

```

-----
Stanovisko: 105

```

Cíl	Délka [m]	$\sigma$ [mm]
-----	-----------	---------------

```

-----

```

104	631.576	2.76
-----		
Stanovisko: 106		
Cíl	Délka [m]	$\sigma$ [mm]
-----		
102	1065.659	3.63
104	755.912	3.01
105	329.237	2.16
-----		

MĚŘENÉ SMĚRY:

=====

Stanovisko: 102		
Cíl	Směr	$\sigma$ [cc]
-----		
106	120.6935	6.00
104	170.4314	6.00
-----		

Stanovisko: 104		
Cíl	Směr	$\sigma$ [cc]
-----		
102	224.3612	6.00
106	332.0316	6.00
105	360.3541	6.00
-----		

Stanovisko: 105		
Cíl	Směr	$\sigma$ [cc]
-----		
106	0.0056	6.00
104	290.1504	6.00
-----		

Stanovisko: 106		
Cíl	Směr	$\sigma$ [cc]
-----		
105	0.0063	6.00
104	61.8292	6.00
102	104.4223	6.00
-----		

PARAMETRY SÍTĚ:

=====

Testování oprav měření se provádí oboustranným testem k hladině významnosti Alfa = 10.0  
Při překročení kritické hodnoty  $t > 1.65$  je vypočten odhad chyby měřené veličiny Eps.  
Současně je vypočtena hodnota mezní chyby k necentrálnímu parametru Delta = 2.49.  
Pravděpodobnost chyby 2. druhu Beta = 20.0 %.  
Počet bodů v síti : 4  
Počet bodů, na nichž jsou měřeny směry: 4  
Počet měřených délek : 5  
Počet měřených směrů : 10  
Počet měřených veličin : 15  
Způsob připojení sítě : Pevný bod: 105, pevný směrník na bod: 102

LEGENDA K VYROVNANÝM DÉLKÁM A SMĚRŮM:

=====

l : Vektor pravých stran linearizovaného modelu sítě  
r : Podíl dané veličiny na počtu nadbytečných veličin  
t : Podíl opravy a její střední chyby  
Eps : Odhad chyby geometrické veličiny  
EpsMax: Odhad mezní hodnoty chyby geometrické veličiny pro necentrální parametr Delta

VYROVNANÉ DÉLKY:

=====

Stanovisko: 104

Cíl	Délka [m]	v souř [mm]	v r.o. [mm]	$\sigma_s$ [mm]	l [mm]	r	t	Eps [mm]	EpsMax [mm]
102	665.7671	1.10	1.10	3.16	-84.57	0.14	0.87		

Stanovisko: 105

Cíl	Délka [m]	v souř [mm]	v r.o. [mm]	$\sigma_s$ [mm]	l [mm]	r	t	Eps [mm]	EpsMax [mm]
104	631.5746	-1.37	-1.37	2.72	-57.20	0.33	0.72		

Stanovisko: 106

Cíl	Délka [m]	v souř [mm]	v r.o. [mm]	$\sigma_s$ [mm]	l [mm]	r	t	Eps [mm]	EpsMax [mm]
102	1065.6590	0.04	0.04	3.60	-118.09	0.32	0.02		
104	755.9119	-0.09	-0.09	2.66	-70.77	0.46	0.04		
105	329.2374	0.38	0.38	2.46	18.80	0.10	0.46		

Průměrná střední chyba vyrovnané délky [mm]: 2.95

Průměrná hodnota měřené délky [m]: 689.6300

Průměrná hodnota vyrovnané délky [m]: 689.6300

VYROVNANÉ SMĚRY:

=====

Stanovisko: 102

Cíl	Směr [g]	v [cc]	$\sigma$ [cc]	l [cc]	r	t	Eps [cc]	EpsMax [cc]
106	120.69326	-2.37	5.35		0.45	0.49		
104	170.43164	2.37	5.35		0.45	0.49		

Stanovisko: 104

Cíl	Směr [g]	v [cc]	$\sigma$ [cc]	l [cc]	r	t	Eps [cc]	EpsMax [cc]
102	224.36150	2.98	5.53		0.41	0.65		
106	332.03199	3.95	4.58		0.60	0.71		
105	360.35341	-6.93	4.85		0.55	1.30		

Stanovisko: 105

Cíl	Směr [g]	v [cc]	$\sigma$ [cc]	l [cc]	r	t	Eps [cc]	EpsMax [cc]
106	0.00530	-2.98	5.94		0.32	0.73		
104	290.15070	2.98	5.94		0.32	0.73		

Stanovisko: 106

Cíl	Směr [g]	v [cc]	$\sigma$ [cc]	l [cc]	r	t	Eps [cc]	EpsMax [cc]
105	0.00623	-0.65	5.41		0.14	10.83		
104	61.83022	10.17	4.60		1.84	-19.69	2.33	
102	104.42135	-9.52	4.89		1.80	-17.64		

Průměrná střední chyba vyrovnaného směru [cc]: 5.27

VÝSLEDKY VYROVNÁNÍ:

```

=====
Počet nadbytečných měření          : 6
Základní střední chyba m0 apriorní  [cc]: 1.00
Základní střední chyba m0 aposteriorní [cc]: 1.20
m0 aposteriorní / m0 apriorní       : 1.20
Interval spolehlivosti              : 0.42 - 1.58

```

VYROVNANÉ SOUŘADNICE:

```

=====
      Bod      Y          X          dy      dx
          [m]      [m]      [mm]     [mm]
-----
      102  845560.3778  998311.5721  12.81  100.86
      104  845324.6819  997688.9220  58.89  -29.05
      105  845703.6610  997183.6880   0.00   0.00
      106  845994.3478  997338.2792   7.82  26.16
-----

```

INFORMACE O STŘEDNÍCH CHYBÁCH:

```

=====
      Bod      my      mx      mxy
          [mm]     [mm]     [mm]
-----
      102     0.47     3.72     2.65
      104     3.01     3.11     3.06
      105          Pevný bod
      106     2.35     2.91     2.64
-----

```