

Výuka v terénu GD 3,4

Účelová síť - určení výšek – Výpočet výškové sítě vyrovnáním

Parametry výškové sítě

Počet bodů v síti: 4 (102, 104, 105, 106)

Počet měřených výškových rozdílů: 6 (všechny)

Počet neznámých: 3 (nadmořské výšky)

Počet měřených zenitových úhlů: 12

Počet měřených délek: 6

Počet zprostředkujících veličin: 6 (výškové rozdíly)

Rozměr matice plánu: 6×3 (hodnota matice je 3)

Počet nadbytečných měření: 3

Způsob připojení sítě: vázaná síť, výškově připojena na bod 106 (zprostředkující a podmínkové vyrovnání)

Stanovisko, cíl: excentrické

Použitý přístroj: Leica TS06 (přesnost $\sigma_{\text{HzV}} = 0,6 \text{ mgon}$, $\sigma_D = 1,5 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$).

• Zpracování

Cílem je výpočet nadmořských výšek bodů výškové sítě s vyrovnáním metodou nejmenších čtverců (vyrovnání zprostředkujících měření a kontrolně také vyrovnání podmínkových měření) a výpočet charakteristik přesnosti. V síti je jeden daný bod (106), jehož výška je určena pomocí PN, měření tvoří trigonometrické výškové rozdíly. Do vyrovnání se zavedou váhy výškových rozdílů $p = 1/d^2$, délka příslušné záměry se dosadí v km, matice vah je diagonální. Jednotkovou váhu přisoudíme měření na délku záměry $d = 1 \text{ km}$ a odpovídající hodnota střední chyby vzhledem k použitému přístroji a očekávané přesnosti měření zenitových úhlů $\sigma_v = 0,4 \text{ mgon}$ je $\sigma_0 = 4,4 \text{ mm}$ (viz příklad na str. 14).

Vyrovnání výškové sítě v kostce (pracovní jednotky jsou metry): do schématu výškové sítě se šipkami vyznačí směr stoupání terénu - v tomto směru je výškový rozdíl kladný, výškové rozdíly (všechny kladné) se očíslovají v libovolném pořadí 1-6. Tabulka měření a vah ($i = 1, 2, \dots, 6$)

$h_i \text{ (m)}$	$d_i \text{ (km)}$	váha $p_i = 1/d_i^2$
-------------------	--------------------	----------------------

Přibližné nadmořské výšky určovaných bodů se určí z daného bodu 106 a měřených výškových rozdílů.

Funkční vztah pro vyrovnaní zprostředkujících měření má tvar $h_1 - (H_{105} - H_{106}) = 0$, atd., kde výškový rozdíl $h_1 = h_{106,105}$, H jsou nadmořské výšky.

Rovnice oprav

$$h_1^m + v_1 = H_{105}^0 + dH_{105} - H_{106}$$

$$v_1 = dH_{105} - (h_1^m - (H_{105}^0 - H_{106})), \text{ atd.},$$

kde dH jsou přírůstky přibližných hodnot nadmořských výšek určovaných bodů, člen v závorce je redukované měření. Z koeficientů -1, 0, 1 u neznámých v rovnicích oprav se sestaví 6×3 matice plánu $\mathbf{A}$, dále značí $\mathbf{l}$ vektor redukovaných měření

Vzorce:

$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l}$, ... systém rovnic oprav měření

$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}$, ... řešení normálních rovnic (výsledné hodnoty přírůstků)

$H_{105} = H_{105}^0 + dH_{105}$, atd. ... určení neznámých výšek

$$\sigma'_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n'}}, \text{ ... empirická (aposteriorní) hodnota jednotkové variance, } n' = 3$$

$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$, ... matice váhových koeficientů neznámých

$\sigma_{Hi} = \sigma_0 \sqrt{Q_{Xii}}$, ... apriorní střední chyby (sm. odch.) vyrovnaných výšek

$h_1 = h_1^m + v_1$, atd. ... vyrovnaná převýšení (měření)

$\mathbf{Q}_h = \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$, ... matice váhových koeficientů vyrovnaných měření.

Interval spolehlivosti ($\alpha = 0,05$, $P = 0,95$)

$$\sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha/2}^2}{n'}} \leq \frac{\sigma'_0}{\sigma_0} \leq \sqrt{\frac{\chi_{\alpha/2}^2}{n'}},$$

kde $\chi_{1-\alpha/2}^2$, $\chi_{\alpha/2}^2$ jsou kritické hodnoty chí-kvadrát rozdělení pro n' stupňů volnosti; určí se v Matlabu, funkce **chi2inv(P, n')** vypočte kvantil.

Kontrolní výpočet výškové sítě pomocí vyrovnání podmínkových měření. Výsledkem vyrovnání jsou vyrovnané výškové rozdíly. V síti se uplatní tři trojúhelníkové podmínkové rovnice (počet nadbytečných měření). Mezní odchylka pro součet převýšení mezi body v trojúhelníku (uzávěr) je $t \sigma_0 \sqrt{\sum d_{i,km}^2}$ [mm], pod odmocninou je součet reciprokých hodnot vah převýšení. Pro vzdálenosti $d_i = 1,0$ km (rovnostranný trojúhelník), $t = 2$ a $\sigma_0 = 4,4$ mm (viz str. 14) je mezní odchylka 15 mm.

Pro součet vyrovnaných výškových rozdílů v trojúhelníku platí obecně podmínka typu

$$(h_1^m + v_1) + (h_2^m + v_2) - (h_3^m + v_3) = 0$$

$\vdots$

atd.

Přetvořené podmínková rovnice a maticový zápis

$$v_1 + v_2 - v_3 + u_1 = 0$$

$\vdots$

atd.

$$\mathbf{D} \mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}, \text{uzávěr } u_1 = h_1^m + h_2^m - h_3^m.$$

Výsledkem řešení kritéria $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \min$ při splnění přetvořených podmínkových rovnic jsou opravy a vyrovnaná měření

$$\mathbf{v} = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}^T (\mathbf{D} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}^T)^{-1} \mathbf{u},$$

$h_1 = h_1^m + v_1$, atd., zároveň musí být splněny původní podmínkové rovnice.

Z vyrovnaných převýšení a známé nadmořské výšky bodu 106 se určí výšky ostatních bodů. Oba způsoby vyrovnání jsou ekvivalentní, dají stejné nadmořské výšky a charakteristiky přesnosti.