

## Transformace souřadnic 2D (podobnostní)

Jsou dány obecně dva kartézské systémy souřadnic. Jejich vzájemné vztahy (transformace) jdou jednoduše popsat pomocí tří operací:

- 1) Posun
- 2) Stočení
- 3) Změna měřítka (pro shodnostní transformaci je rovna 1)

Aby bylo možné transformaci určit, je nutné znát alespoň 2 identické body v obou soustavách (body **P** a **K**). Tedy známe souřadnice v soustavě **S** (XY) a v soustavě **s** (xy). Je dobré začít s výpočty odzadu.

Základní rovnice transformace je:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

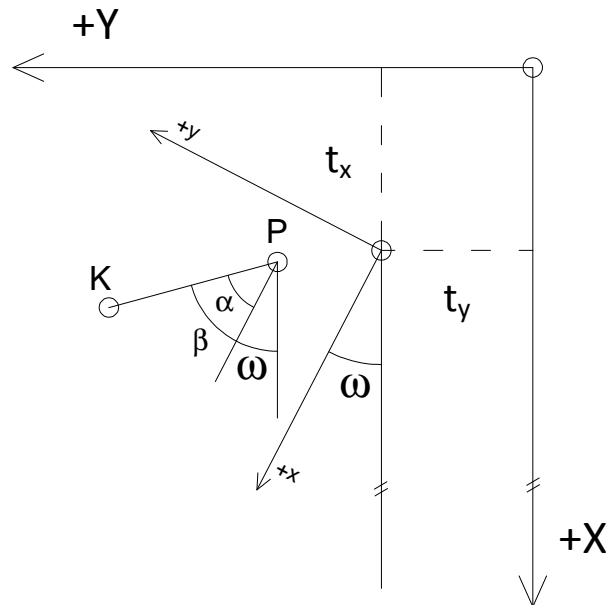
Kde  $t_x$  a  $t_y$  jsou posuny,  $m$  je měřítko a  $\omega$  je stočení.

### Změna měřítka

Změna měřítka  $m$  je dána podílem vzdáleností identických bodů **P** a **K**. Tj. spočteme vzdálenost bodů **P** a **K** v obou soustavách ze souřadnic a navzájem je podělíme. Poměr je dán jako vzdálenost v soustavě, do které transformujeme (vypočtená většinou ze souřadnic) ke vzdálenosti v soustavě, ze které transformujeme (většinou přímo měřená).

### Stočení

Stočení dvou soustav lze vypočítat z rozdílů směrnic, které jsou dány identickými body v každé soustavě. Přehledně je úhel stočení  $\omega$  na Obr. 1, kde směrnic v soustavě **S** je označen  $\beta$  a směrnic v soustavě **s** je označen  $\alpha$ . Úhel stočení je směrnic v soustavě **S**, do které transformujeme, minus směrnic v soustavě **s**, ze které transformujeme.



Obr. 1 – Posun a stočení

## Posun

Posun dvou soustav souřadnic je dán ortogonálními průměty do jednotlivých os souřadného systému  $t_x$  a  $t_y$  dle Obr. 1. Není jednoduché ho spočítat a proto je výhodné posuny určit ze základní rovnice transformace při známém úhlu stočení a měřítku. Pokud rovnice transformace rozepíšeme, dostaneme vztahy:

$$\begin{aligned} X &= t_x + m \cdot (x \cdot \cos \omega - y \cdot \sin \omega) \\ Y &= t_y + m \cdot (x \cdot \sin \omega + y \cdot \cos \omega) \end{aligned}$$

A tedy:

$$\begin{aligned} t_x &= X - m \cdot (x \cdot \cos \omega - y \cdot \sin \omega) \\ t_y &= Y - m \cdot (x \cdot \sin \omega + y \cdot \cos \omega) \end{aligned}$$

## Odvození přes souřadnicové rozdíly

Rovnice transformace můžeme napsat pro dva identické body **P** a **K** takto:

$$\begin{aligned} X_P &= t_x + m \cdot (x_P \cdot \cos \omega - y_P \cdot \sin \omega) \\ Y_P &= t_y + m \cdot (x_P \cdot \sin \omega + y_P \cdot \cos \omega) \\ X_K &= t_x + m \cdot (x_K \cdot \cos \omega - y_K \cdot \sin \omega) \\ Y_K &= t_y + m \cdot (x_K \cdot \sin \omega + y_K \cdot \cos \omega) \end{aligned}$$

Pokud od sebe rovnice odečteme a přejdeme na souřadnicové rozdíly:

$$X_P - X_K = m \cdot \Delta x_{PK} \cdot \cos \omega - m \cdot \Delta y_{PK} \cdot \sin \omega$$

$$Y_P - Y_K = m \cdot \Delta x_{PK} \cdot \sin \omega + m \cdot \Delta y_{PK} \cdot \cos \omega$$

A zavedeme substituci, kde  $a = m \cdot \sin \omega$  a  $b = m \cdot \cos \omega$ , dostaneme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$\Delta X_{PK} = b \cdot \Delta x_{PK} - a \cdot \Delta y_{PK}$$

$$\Delta Y_{PK} = a \cdot \Delta x_{PK} + b \cdot \Delta y_{PK}$$

A z nich konečné výrazy pro neznámé:

$$a = \frac{\Delta x_{PK} \cdot \Delta Y_{PK} - \Delta y_{PK} \cdot \Delta X_{PK}}{\Delta x_{PK}^2 + \Delta y_{PK}^2}$$

$$b = \frac{\Delta x_{PK} \cdot \Delta X_{PK} + \Delta y_{PK} \cdot \Delta Y_{PK}}{\Delta x_{PK}^2 + \Delta y_{PK}^2}$$

Transformaci bodu **A** pomocí souřadnicových rozdílů tedy provedeme takto:

$$X_A = X_P + b \cdot \Delta x_{PA} - a \cdot \Delta y_{PA}$$

$$Y_A = Y_P + a \cdot \Delta x_{PA} + b \cdot \Delta y_{PA}$$

### Příklad:

Vypočtěte posun, úhel stočení a změnu měřítka pro transformaci z lokálního souřadného systému do S-JTSK, ve kterých jsou uvedeny identické body 4001 a 4002. Podobnostní transformací za použití vypočtených parametrů vypočtěte souřadnice bodů 101 a 102 v S-JTSK.

	Souřadnice v místní soustavě [m]		Souřadnice v S-JTSK [m]	
	x	y	X	Y
<b>4001</b>	5321,132	1175,604	1004751,374	697704,154
<b>4002</b>	5000,022	1033,033	1004418,829	697824,541
<b>101</b>	5466,538	1262,839	1004917,768	697666,103
<b>102</b>	5584,975	1368,573	1005077,481	697660,288

m	1,00662
$\omega$ [gon]	351,2866
$t_x$ [m]	1000068,374
$t_y$ [m]	700560,849