3. přednáška ze stavební geodézie SGEA

Ing. Tomáš Křemen, Ph.D.

Hodnocení přesnosti měření a vytyčování. Odchylky a tolerance ve výstavbě.

Obecně o měření

Chyby měření a jejich dělení

Výpočet charakteristiky přesnosti

Zpracování přímých měření stejné přesnosti

Zpracování přímých měření nestejné přesnosti

Příklady

Zákon hromadění směrodatných odchylek

Příklady

Vybrané pojmy z geometrické přesnosti staveb

Vytyčovací odchylky ve výstavbě

Obecně o měření

V geodézii měříme především délky, úhly a dále např. čas, teplotu, tlak, tíhové zrychlení... Výsledek měření je charakterizován číslem, které je také závislé na volbě jednotek.

Pokud se opakuje měření téže veličiny, tak i při sebevětší pečlivosti dostaneme obecně různé výsledky. To je způsobeno tím, že žádné měření nelze izolovat od rušivých vlivů (nedokonalost našich smyslů, nedokonalost přístrojů, vnější vlivy, nedostatečná znalost všech vlivů, které způsobují chyby měření).

Omezováním těchto vlivů (použitím přesnějšího přístroje) lze snížit jejich velikost a tak zvýšit přesnost měření. Číselný výsledek měření, který je v určitých mezích náhodnou veličinou, určují proměnlivé, velmi početné a nejenom proto skoro nepostižitelné vlivy. Rozdílnost výsledků měření vyplývá z fyzikální podstaty prostředí, ve kterém probíhá.

Při měření a jeho zpracování je hledána nejspolehlivější hodnota výsledku měření, odhadována její přesnost a meze její spolehlivosti. Měřením či zpracováním měření **NIKDY** nezískáme skutečnou hodnotu veličiny.

Chyby měření a jejich dělení:

Výsledek každého měření je vždy zatížen skutečnou chybou ε, jež je souhrnem působení jednotlivých vlivů. Skutečnou chybu měření ε_i lze vyjádřit pomocí skutečné hodnoty veličiny X a měřené hodnoty l_i:

$$\varepsilon_i = X - l_i$$

Skutečná chyba ε obsahuje:

1) Omyly a hrubé chyby
2) Nevyhnutelné chyby
    - Náhodné chyby δ_i
    - Systematické chyby c_i

$$\varepsilon_i = \delta_i + c_i$$

Omyly a hrubé chyby

Omyly nejsou způsobeny objektivními podmínkami měření, ale nesprávnými úkony měřiče (omyl, nepozornost, ...).

Hrubé chyby mohou vznikat nakupením nepříznivých vlivů nebo jejich neobvyklou velikostí (silný vítr, atmosférická refrakce, vibrace, ...)

Aby byly odhaleny, je potřeba realizovat kontrolní měření (dvojí měření téhož, jedno měření – žádné měření).

Nepatří mezi chyby nevyhnutelné a dále nebudou uvažovány.

Systematické chyby

Vznikají z jednostranně působících příčin, za stejných podmínek ovlivňují měření ve stejném smyslu, tj. chyba měření má stejné znaménko i velikost. Lze je dělit na:

1) Konstantní – při každém měření stejné znaménko i velikost (chybná délka pásma).

2) Proměnlivé – jejich vliv se mění v závislosti na podmínkách měření (teplota, tlak), jejich vliv může mít i různá znaménka.

Systematické chyby je možno potlačit seřízením (rektifikací) přístrojů a pomůcek před měřením a vhodnou metodikou měření a zpracování měření.

Náhodné chyby

Takové chyby, které při stejné měřené veličině, metodě měření, podmínkách a pečlivosti náhodně nabývají různé velikosti i znaménka se nazývají náhodné chyby. Jednotlivě nemají žádné zákonitosti a jsou vzájemně nezávislé, nepředvídatelné a nezdůvodnitelné. Ve větších souborech (vícekrát opakované měření) se však již řídí jistými statistickými zákonitostmi. Náhodné chyby stejného druhu mají charakter náhodné veličiny s normálním rozdělením pravděpodobnosti.

Vlastnosti náhodných chyb

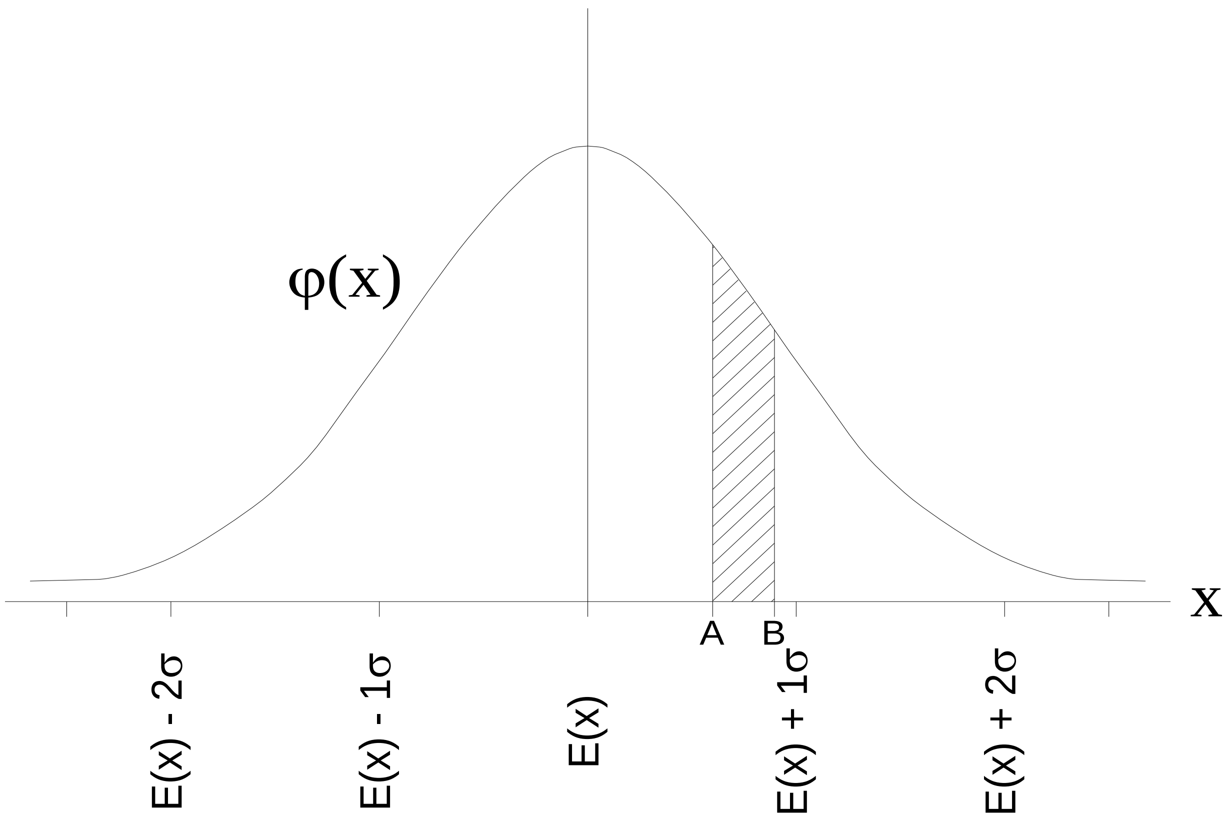
- pravděpodobnost vzniku kladné či záporné chyby určité velikosti je stejná,
- malé chyby jsou pravděpodobnější (četnější) než velké,
- chyby nad určitou mez se nevyskytují (resp. považujeme je za hrubé).

Hustota pravděpodobnosti ϕ(x) (frekvenční funkce) normálního rozdělení N(E(x),σ^2):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left\{x - E(x)\right\}^2}{2\sigma^2}}, \; x \in (-\infty, \infty).$$

Zápis N(E(x), σ^2) značí normální rozdělení (N) o charakteristikách E(x) a σ^2, kde E(x) je tzv. střední hodnota, zde ona neznámá skutečná hodnota měřené veličiny, σ^2 je tzv. variance (kvadrát směrodatné odchylky).

Graf frekvenční křivky normálního rozdělení pro $N(E(x),\sigma^2)$



$$P = \int_A^B \varphi(x)\,dx$$

Pravděpodobnost P, že měření bude zatíženo chybou o velikosti padnoucí do intervalu <A;B> je rovna ploše vyšrafované v grafu.

Několik hodnot pravděpodobností P, charakterizujících normální rozdělení:

A	B	P
E(x)	E(x) + σ	0,341
E(x) – σ	E(x) + σ	**0,682**
E(x)	E(x) + 2σ	0,477
E(x) –2σ	E(x) + 2σ	**0,954**
E(x)	E(x) + 3σ	0,499
E(x) – 3σ	E(x) + 3σ	**0,997**
E(x) – ∞	E(x) + ∞	1,000

Charakteristiky přesnosti měření

Směrodatná odchylka σ je parametr popisující normální rozdělení. Ve vztahu k měření je to charakteristika přesnosti. Z hlediska chyb měření je třeba vždy tuto charakteristiku interpretovat s ohledem na předchozí tabulku, a tedy si uvědomit, že např. v intervalu

<-2σ ; 2σ> od měřené hodnoty se vyskytuje hledaná hodnota geometrického parametru s pravděpodobností 95% (za předpokladu, že měření mají normální rozdělení).

Výpočet charakteristiky přesnosti měření

Jako charakteristika přesnosti měření se téměř výhradně využívá směrodatná odchylka σ. Tu lze vypočítat jako kvadratický průměr skutečné chyby.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2}}{n}}$$

V závislosti na tom, kolik měření je k dispozici, je značena buď jako „základní směrodatná odchylka ***σ***“ nebo jako „výběrová směrodatná odchylka ***s***“. Základní je tehdy, pokud je určena z velkého souboru měření, kde n → ∞. Výběrová při počtu menším.

Zpracování přímých měření stejné přesnosti

Při praktickém měření kromě několika málo specifických případů skutečnou hodnotu neznáme. V takovém případě lze jako nejpravděpodobnější odhad skutečné hodnoty použít aritmetický průměr $\bar{l}$. Rozdíly průměrné hodnoty a jednotlivých měření l_i jsou pak nazývány opravami v_i, ze kterých se počítá výběrová směrodatná odchylka s, přesněji vyjádřeno, její odhad.

$$\bar{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} l_i}{n}$$

$$v_i = \bar{l} - l_i$$

$$s = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {v_i}^2}{n-1}}$$

Pokud je známa směrodatná odchylka jednoho měření $\boldsymbol{\sigma}$ a bylo měřeno vícekrát (n-krát), směrodatná odchylka průměrné hodnoty $\boldsymbol{\sigma_{\bar{l}}}$ se vypočte podle vzorce (platí i pro výběrovou směrodatnou odchylku $\boldsymbol{s}$):

$$\boldsymbol{\sigma_{\bar{l}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Výběrová směrodatná odchylka $\boldsymbol{s}$ je **náhodná veličina** – pokud provedeme stejně např. dvakrát 10 měření a vypočteme dvakrát směrodatnou odchylku, obecně nebude stejná.

Příklad na zpracování měření stejné přesnosti

Zadání: délka byla měřena opakovaně 5x za stejných podmínek a stejnou metodou (= se stejnou přesností). Měřené hodnoty v m jsou: 5,628; 5,626; 5,627; 5,624; 5,628. Vypočtěte průměrnou délku, směrodatnou odchylku jednoho měření a směrodatnou odchylku průměru.

Poznámka: Uvažujeme, že měřené hodnoty jsou zatíženy jen náhodnými chybami.

Řešení:

i	l / m	v / m	vv / m^2
1	**5,628**	-0,0014	1,96E-06
2	**5,626**	0,0006	3,60E-07
3	**5,627**	-0,0004	1,60E-07
4	**5,624**	0,0026	6,76E-06
5	**5,628**	-0,0014	1,96E-06
Σ	28,133	0,000	1,12E-05
$\bar{l}$ = 5,6266 m; s_{l_i} = 0,0017 m; $s_{\bar{l}}$ = 0,00075 m			

Zpracování přímých měření nestejné přesnosti

Pokud se táž veličina měří opakovaně, ale jednotlivá měření nemají stejnou směrodatnou odchylku, např. při použití různých metod měření, je nutno zvolit jiný postup zpracování. Přesnost jednotlivých měření musí být známa pro stanovení vah. Váhy se získají ze vzorce:

$$p_i = \frac{c}{\sigma_i^2}$$

kde c je libovolná konstanta, volí se obvykle tak, aby se váhy pohybovaly pokud možno okolo jedné.

Hodnota výsledku měření se získá jako vážený průměr:

$$\bar{l} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i l_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

Výběrová směrodatná odchylka hodnoty určené váženým průměrem se vypočte:

$$s_{\bar{l}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i v_i^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i (n-1)}}$$

$$v_i = \bar{l} - l_i$$

Příklad na zpracování měření nestejné přesnosti

Zadání: délka byla měřena opakovaně 5x různými metodami (s různou přesností). Měřené hodnoty jsou uvedeny se svými směrodatnými odchylkami v závorce (oboje v m): 5,628 (0,0030); 5,626 (0,0020); 5,627 (0,0025); 5,624 (0,0035); 5,628 (0,0025). Vypočtěte průměrnou délku a směrodatnou odchylku průměru.

Řešení:

i	**l / m**	**σ / m**	**p**	**l . p**	**v / m**
1	**5,628**	0,0030	0,6944	3,908	-0,0013
2	**5,626**	0,0020	1,5625	8,791	0,0007
3	**5,627**	0,0025	1,0000	5,627	-0,0003
4	**5,624**	0,0035	0,5102	2,869	0,0027
5	**5,628**	0,0025	1,0000	5,628	-0,0013
Σ			4,767	26,823	

Volba c = $0{,}0025^2$

$\bar{l}$ = 5,6267 m

$\sigma_{\bar{l}}$ = 0,00062 m

Zákon hromadění směrodatných odchylek (ZHSO)

V mnoha případech nelze nebo není výhodné přímo měřit určovanou hodnotu, která se pak určuje zprostředkovaně – výpočtem z jiných měřených hodnot. Příkladem může být plocha trojúhelníka, jsou-li měřeny dvě strany a úhel nebo určení převýšení z měřené šikmé délky a zenitového úhlu. Zde potřebujeme nejen vypočítat hledanou hodnotu, ale také určit její směrodatnou odchylku. Známe–li funkční vztah mezi veličinami, dokážeme ji odvodit pomocí zákona hromadění směrodatných odchylek.

ZHSO vychází ze zákona hromadění skutečných chyb, který je založen na totálním diferenciálu funkčního vztahu. Jestliže je dán funkční vztah, tzn. určovaná veličina je funkcí k dalších měřených veličin:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_k)$$

pak pro skutečné chyby platí:

$$y + \varepsilon_y = f(x_1 + \varepsilon_{x_1}, x_2 + \varepsilon_{x_2}, x_3 + \varepsilon_{x_3}, x_4 + \varepsilon_{x_4}, ..., x_k + \varepsilon_{x_k})$$

Vzhledem k tomu, že skutečné chyby jsou oproti měřeným hodnotám velmi malé, lze rozvinout pravou stranu vztahu podle Taylorova rozvoje s omezením pouze na členy prvního řádu:

$$y+\varepsilon_y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_{x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\varepsilon_{x_3} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\varepsilon_{x_k}$$

Odtud zákon hromadění skutečných chyb:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_{x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\varepsilon_{x_3} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\varepsilon_{x_k}$$

Skutečné chyby měřených veličin zpravidla neznáme, ale známe jejich směrodatné odchylky a zákon hromadění směrodatných odchylek je dán vztahem:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \sigma_{x_3}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{x_k}^2$$

Zákon hromadění směrodatných odchylek platí za těchto podmínek:

1. Jednotlivé měřené veličiny a tedy i jejich skutečné chyby musí být vzájemně nezávislé.
2. Skutečné chyby mají náhodný charakter, jejich znaménko a velikost se řídí normálním rozdělením.
3. Chyby jsou oproti měřeným hodnotám malé, parciální derivace musí zůstat prakticky konstantní, změní-li se měřené hodnoty o hodnoty chyb.
4. Jednotlivé členy musí mít stejný fyzikální rozměr.

Příklady na aplikaci ZHSO

Zadání: Odvoďte vzorec pro směrodatnou odchylku průměru z ***n*** měření, znáte-li směrodatnou odchylku jednoho měření $\boldsymbol{\sigma_l}$.

Funkční vztah :

$$\bar{l} = \frac{[l]}{n} = \frac{l_1 + l_2 + \dots l_n}{n}$$

Zákon hromadění skutečných chyb :

$$\varepsilon_{\bar{l}} = \frac{1}{n}\left\{\varepsilon_{l_1} + \varepsilon_{l_2} + \dots + \varepsilon_{l_n}\right\}$$

Víme, že všechna měření mají stejnou směrodatnou odchylku. O skutečných chybách ale nevíme nic (je to náhodná veličina) a proto NELZE závorku zjednodušit.

Obecně platí : $\varepsilon_{l_1} \neq \varepsilon_{l_2} \neq \ldots \neq \varepsilon_{l_n}$

Zákon hromadění směrodatných odchylek :

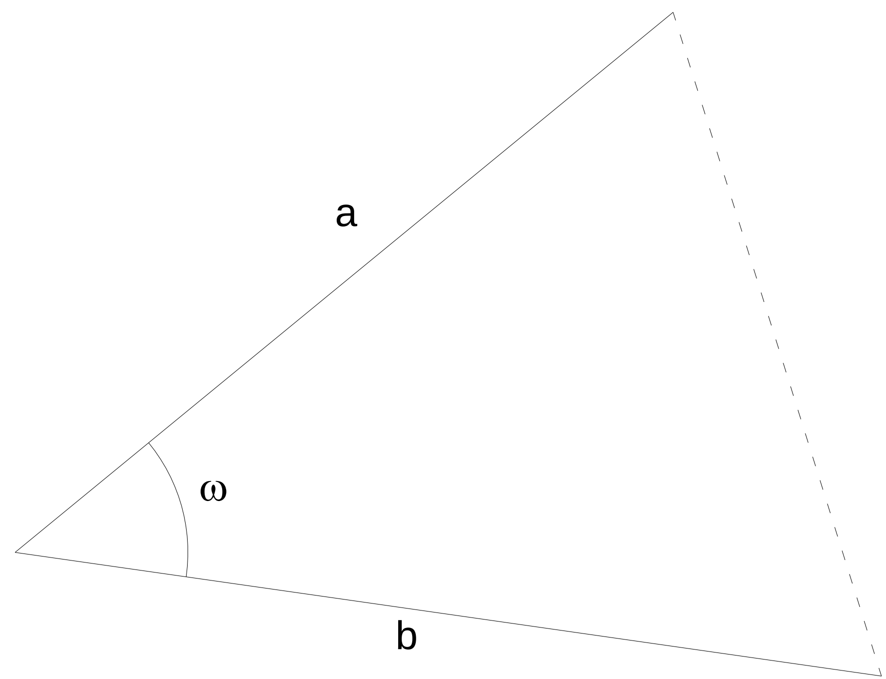
Ze zadání víme, že všechna měření mají stejnou směrodatnou odchylku. Proto platí :

$$\sigma_{l_1} = \sigma_{l_2} = \ldots = \sigma_{l_n} = \sigma_l$$

$$\sigma_{\bar{l}}^2 = \frac{1}{n^2}\left\{\sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2 + \ldots + \sigma_{l_n}^2\right\} = \frac{1}{n^2}\left(n \cdot \sigma_l^2\right) = \frac{\sigma_l^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{l}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_l$$

Zadání: jsou známy dvě délky a = 34,352 m a b = 28,311 m, které byly změřeny se $\sigma_a = \sigma_b$ = 0,002 m. Dále byl změřen úhel ω = 52,3452°, σ_ω = 0,0045°. Určete směrodatnou odchylku plochy trojúhelníka.



Funkční vztah:

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sin(\omega)$$

Skutečné chyby:

$$\varepsilon_P = \frac{1}{2} b \cdot sin(\omega) \cdot \varepsilon_a + \frac{1}{2} a \cdot sin(\omega) \cdot \varepsilon_b + \frac{1}{2} a \cdot b \cdot cos(\omega) \cdot \varepsilon_\omega \cdot \frac{\pi}{180°}$$

$$\left(\rho° = \frac{180°}{\pi} \right)$$

Směrodatné odchylky:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{4} \left(b \cdot sin(\omega) \right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \frac{1}{4} \left(a \cdot sin(\omega) \right)^2 \cdot \sigma_b^2 + \frac{1}{4} \left(a \cdot b \cdot cos(\omega) \right)^2 \cdot \frac{\sigma_\omega^2}{\left(\rho° \right)^2}$$

Úprava pro $\sigma_a = \sigma_b = \sigma_d$:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{4}\left(b^2 + a^2\right) \cdot sin^2(\omega) \cdot \sigma_d^2 + \frac{1}{4}\left(a \cdot b \cdot cos(\omega)\right)^2 \cdot \frac{\sigma_\omega^2}{\left(\rho°\right)^2}$$

Po dosazení: $\sigma_P = 0{,}043\ m^2$, $P = 384{,}983\ m^2$.

Vybrané pojmy z geometrické přesnosti staveb

Základní hodnota geometrického parametru (g. p.)	Hodnota uvedená v projektové dokumentaci.
Skutečná hodnota g. p.	Hodnota ve skutečnosti.
Mezní hodnoty g. p.	Základní hodnota geometrického parametru ± mezní odchylka („horní“ a „dolní“).
Skutečná odchylka	Rozdíl mezi projektovanou a měřenou hodnotou.
Mezní odchylka	Největší přípustná odchylka pro výsledky měření (dle rozboru chyb).
Tolerance	Součet absolutních hodnot dolní a horní mezní stavební odchylky, rozdíl mezi horní a dolní mezní hodnotou geometrického parametru.

Vybrané pojmy z geometrické přesnosti staveb

Přesnost kontrolního měření	Odvíjí se od požadované přesnosti určení geometrického parametru.
Vytyčovací odchylka	Rozdíl mezi vytyčenou hodnotou a základní hodnotou parametru.
Mezní vytyčovací odchylka	Hodnota, která teoreticky může být překročena pouze se stanovenou (malou) pravděpodobností; při vytyčení být překročena nesmí.
Požadovaná směrodatná odchylka	Směrodatná odchylka, s jakou má být provedeno vytyčení.