7. přednáška ze stavební geodézie SGEA

Ing. Tomáš Křemen, Ph.D.

Určování výšek

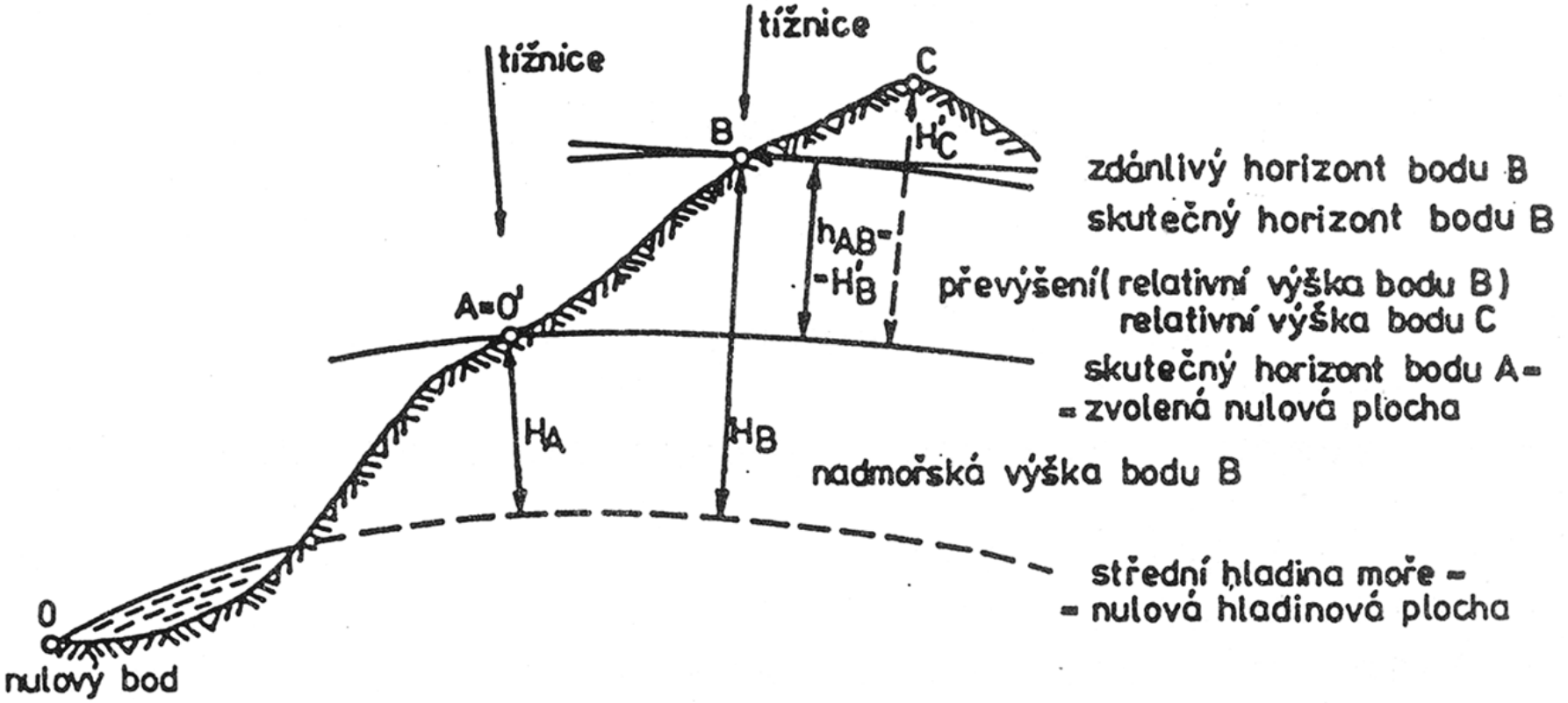
Základní pojmy

Výškové systémy v ČR

Metody určování převýšení

- Barometrická nivelace
- Hydrostatická nivelace
- Trigonometrická metoda
- Geometrická nivelace

Základní pojmy



Základní pojmy

- **Absolutní výška bodu** – výška bodu nad danou *nulovou hladinovou plochou*, střední hladina zvoleného moře → nadmořská výška bodu.
- **Relativní výška bodu** – výška bodu nad hladinovou plochou procházející obecně zvoleným bodem (zvolená nulová plocha, viz obr.).
- **Hladinová plocha** je obecně definována jako plocha stejného tíhového potenciálu.
- Hladinové plochy jsou soustředné plochy a nazýváme je **skutečnými horizonty bodů.**
- **Zdánlivé horizonty bodů** – tečné roviny hladinových ploch v těchto bodech.
- Pro potřeby stavební geodézie považujeme Zemi za homogenní kouli, pak nulová hladinová plocha je kulová plocha procházející nulovým výškovým bodem na střední hladině zvoleného moře.
- Pro práce malého rozsahu (do 200 m) lze Zemi považovat za rovinu → zdánlivé horizonty považujeme za skutečné.

Základní pojmy

Sklon terénu *α* (nebo záměry) se vyjadřuje v procentech a platí:

$$\alpha = \frac{h}{d}.100\%$$

kde ***h*** je převýšení a ***d*** je vodorovná délka.

Předmětem měření nejsou výšky, ale **výškové rozdíly (převýšení)** skutečných horizontů:

$$h_{AB} = H_B - H_A$$

Základní pojmy

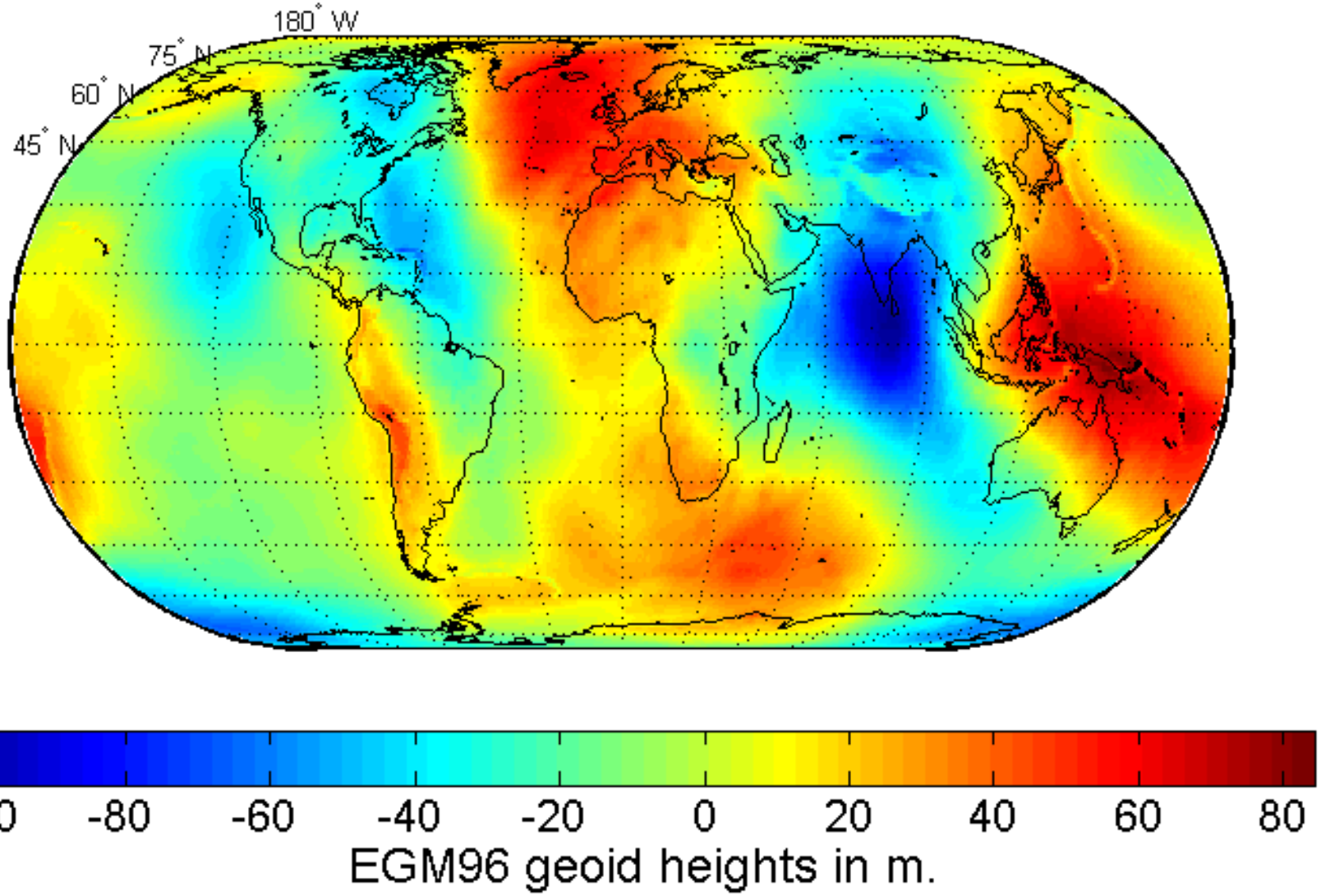
Teorie výšek je složitá. Rozlišujeme různé druhy výšek:

- Pravé ortometrické výšky – teoretické, nad Geoidem.

- Normální ortometrické výšky – prakticky používané v Jaderském výškovém systému, nad elipsoidem.

- Normální (Moloděnského) výšky - prakticky používané ve výškovém systému Balt po vyrovnání (Bpv), nad Kvazigeoidem.

Zemský tíhový model 1996



Výškové systémy v ČR

Výškové systémy používané na území ČR jsou závazně dány NV č.159/2023 Sb. V současné době je závazný pro dokumentaci výsledků zeměměřických činností využívaných ve veřejném zájmu **výškový systém Baltský – po vyrovnání (Bpv)**. Výchozí výškový bod je nula stupnice mořského vodočtu v Krondštadtu. Pro tento výškový systém byla použita teorie Moloděnského normálních výšek.

Dříve byl používán výškový systém Jaderský, jehož výchozí bod se nachází na molu Sartorio v Terstu a vychází z teorie normálních ortometrických výšek.

Rozdíl mezi těmito systémy je kolem 40 cm. Výšky v Bpv jsou menší.

Rozdíl je způsoben odlišným vyrovnáním a odlišným typem výšek.

Metody určování převýšení

- Barometrická nivelace
- Hydrostatická nivelace
- Trigonometrická metoda
- Geometrická nivelace (viz příští přednáška)
- GNSS (Globální Navigační Satelitní Systémy)

Nejpoužívanější metodou pro **přesná** měření je geometrická nivelace a trigonometrická metoda, ostatní metody jsou metodami doplňkovými, jejichž použití je omezeno přesností nebo přístrojovým vybavením.

Barometrická nivelace

Metoda je založena na poklesu atmosférického tlaku při rostoucí nadmořské výšce. Změnou výšky přibližně o 11 m klesne tlak přibližně o 1 mm Hg (1 Tor; 4/3 mbar).

Princip metody spočívá na měření barometrického tlaku vzduchu, který je vyvolán tíhou zemské atmosféry.

Výškový rozdíl dvou bodů se určí v závislosti na měřeném rozdílu barometrických tlaků.

Babinetův vzorec (tlak b v torr, teplota t ve °C):

$$\Delta V = 8019 \frac{b_1 - b_2}{b} \left(1 + 0,00367 \cdot t\right),$$

$$b = \frac{b_1 + b_2}{2}, t = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Barometrická nivelace

Přesnost metody 1 m až 3 m, výhodná pro rychlost při určování velkých výškových rozdílů. Používají se tzv. aneroidy (barometry).

Postupy měření :

Se dvěma přístroji - jeden aneroid zůstává celou dobu měření na výchozím bodě o známé nadmořské výšce a v pravidelném intervalu nebo ve smluvených okamžicích je měřen atmosférický tlak a teplota. Druhý aneroid se nejprve na výchozím bodě porovná s prvním a pak se s ním postupně obcházejí body, jejichž výšku je třeba určit (měří se tlak, teplota, čas).

S jedním přístrojem - postupně se změří tlak a teplota na výchozím bodě a všech určovaných. Méně přesné.

Hydrostatická nivelace

Princip metody vychází z fyzikálního zákona o spojitých nádobách naplněných vhodnou kapalinou. Nádoby, které jsou spojeny hadicí, se umístí na body, jejichž převýšení chceme určit. Pro kapalinu platí Bernoulliho rovnice rovnováhy :

$$p_1 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

kde p_1, p_2 jsou atmosférické tlaky v nádobách,

ρ_1, ρ_2 jsou hustoty kapalin,

h_1, h_2 jsou relativní výšky kapaliny v nádobách,

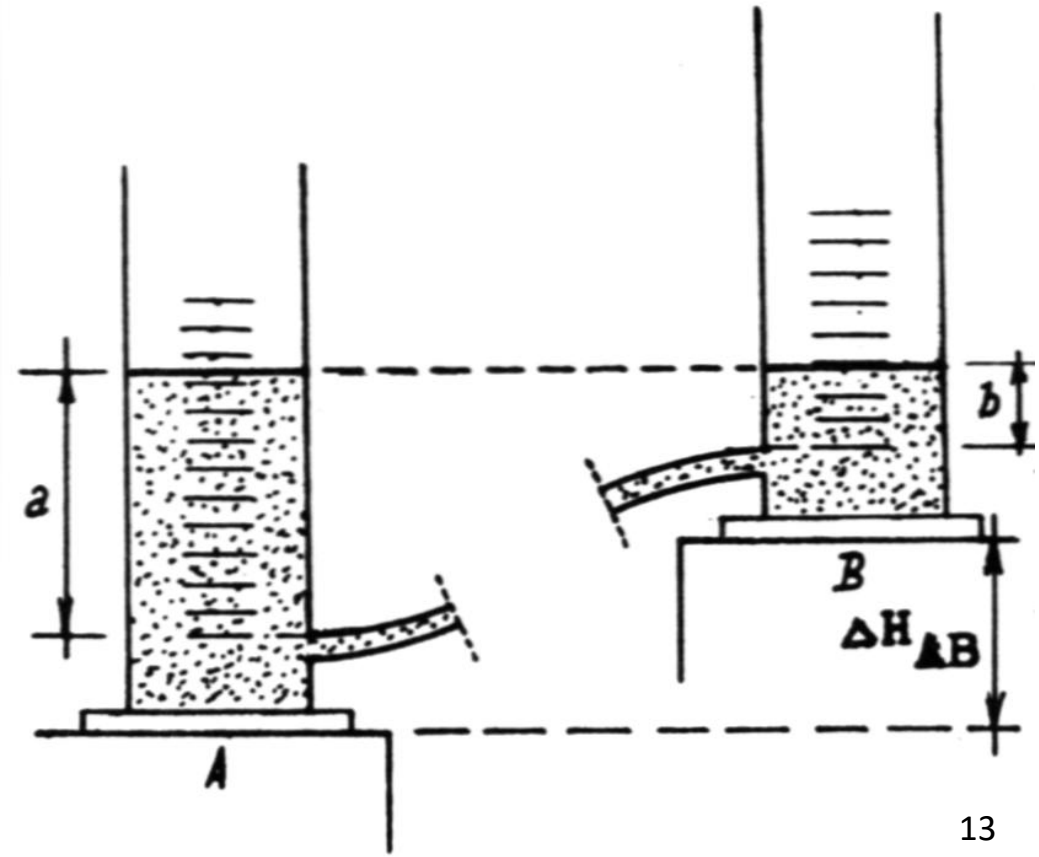
g je tíhové zrychlení.

Pokud $p_1 = p_2$ a $\rho_1 = \rho_2$, bude výška hladin tvořit společnou hladinovou plochu.

Hydrostatická nivelace

Hadicová vodováha je nejjednodušším přístrojem pro hydrostatickou nivelaci, používaná ve stavebnictví pro přenášení výšek zejména v interiérech (např. pro zarovnání hlavic sloupů, stropní podhledy, podlahy). Princip je zřejmý z obrázku.

Její přesnost je asi 3 – 5 mm, dosah podle délky hadice (většinou cca 10 m), používá se pro malé výškové rozdíly (řádově centimetry).



$$\Delta H_{AB} = a - b$$

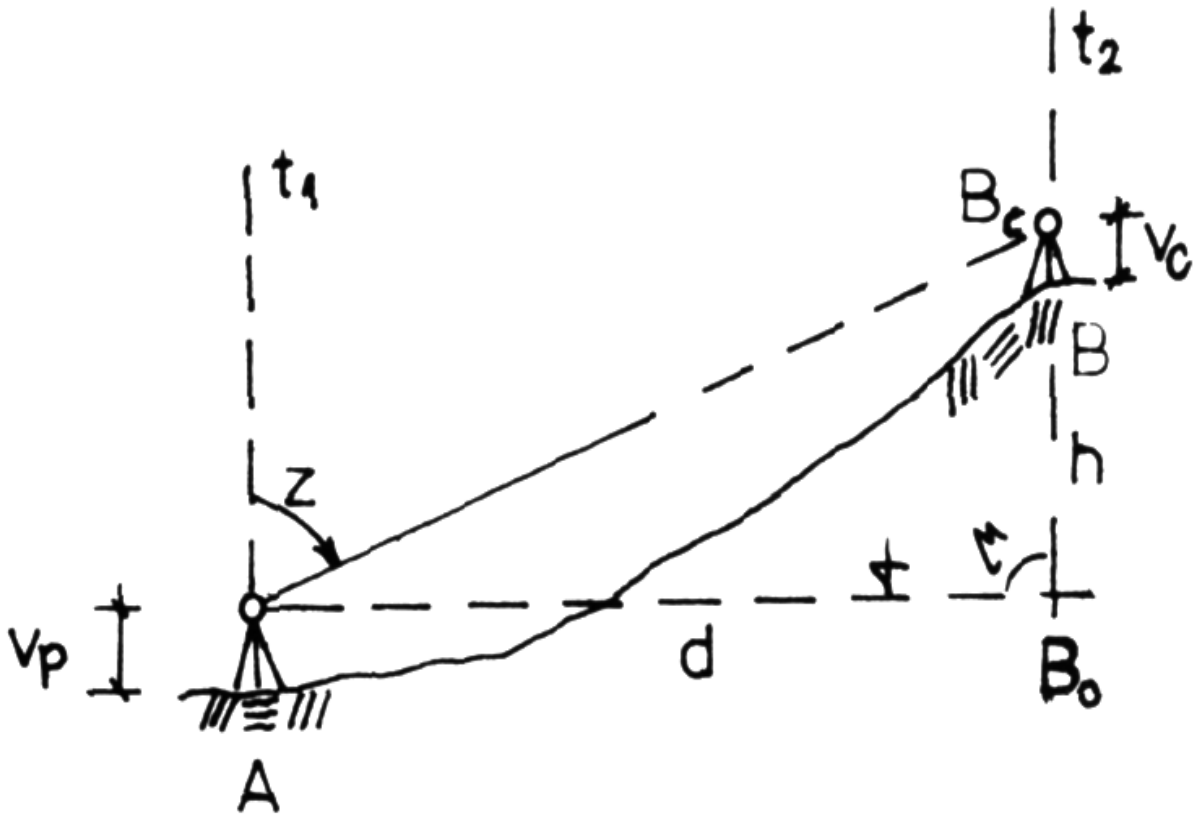
Hydrostatická nivelace

Hadicové výškoměry mají dokonalejší konstrukci a vyšší přesnost, vyžadují dodržení řady podmínek (např. speciální druh stabilizace pro zavěšení nádob, k měření výšky hladin se užívá indikační jehla). Používají se pro přesná měření deformací velkých staveb – základové desky, revizní štoly přehrad, jaderné elektrárny. Přesnost se pohybuje kolem 0,1 mm, vhodné pro stálé nepřetržité sledování. Výškoměry mohou být vybaveny automatickým odečtem, který zasílá měřená data k centrálnímu vyhodnocení ze všech instalovaných výškoměrů (mohou jich být desítky). Pokud by byla překročena povolená odchylka, systém sám vyhlásí poplach.

V některých státech se používá rovněž **hydrodynamická nivelace** (Severní Amerika, Rusko, Španělsko), při které je kapalina ve stálém spojitém pohybu. Přesnost je srovnatelná.

Trigonometrická metoda

Převýšení dvou bodů se určuje na základě řešení trojúhelníka (pravoúhlého nebo obecného). Princip metody je zřejmý z obrázku. Přesnost je srovnatelná s technickou nivelací. Přesnost je se vzrůstající vzdáleností výrazně zhoršována refrakcí, resp. její vertikální složkou.



Trigonometrická metoda

Na bodě A se známou výškou H_A je teodolitem, jehož výška v_p je změřena např. skládacím dvoumetrem, změřen zenitový úhel z na cíl, který je postaven na bodě B a má výšku v_c. Vzdálenost mezi body A a B je možno určit :

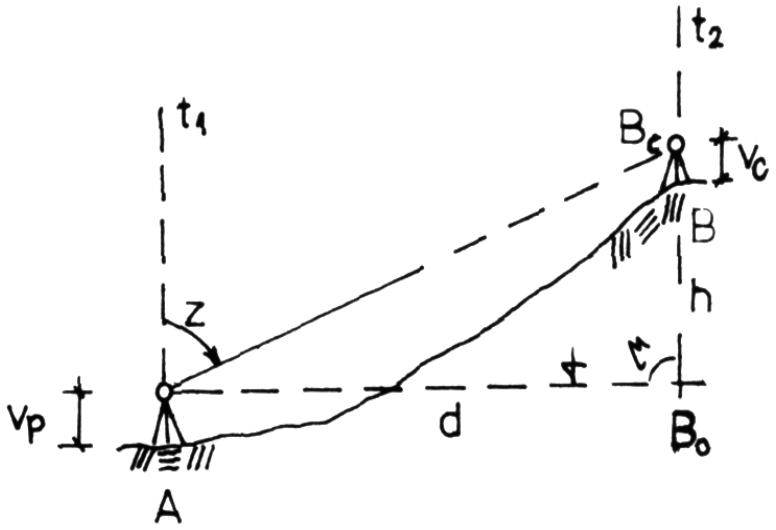
1. Přímým měřením šikmé vzdálenosti

$$H_B = H_A + v_p + h - v_c$$

$$H_B = H_A + v_p + d_s . \cos(z) - v_c$$

Pro ryskový dálkoměr

$$h = k \cdot l \cdot \sin z \cdot \cos z$$

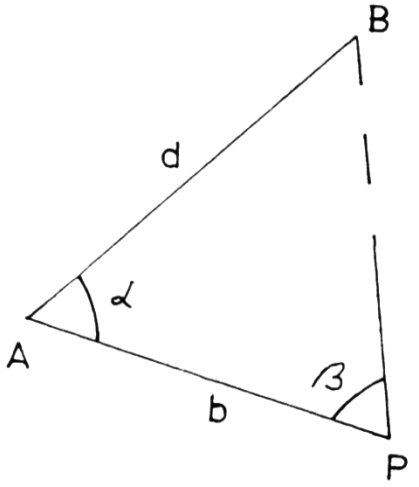


Trigonometrická metoda

2. Prostřednictvím pomocné základny

Na bodech A a P jsou měřeny vodorovné úhly α a β a zenitové úhly z_a a z_b pásmem je měřena vodorovná délka základny b, pro vodorovnou délku d mezi body A a B platí :

$$d = b \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$



$$H_B = H_A + v_p + h - v_c = H_A + v_p + d.\cot(z_a) - v_c$$

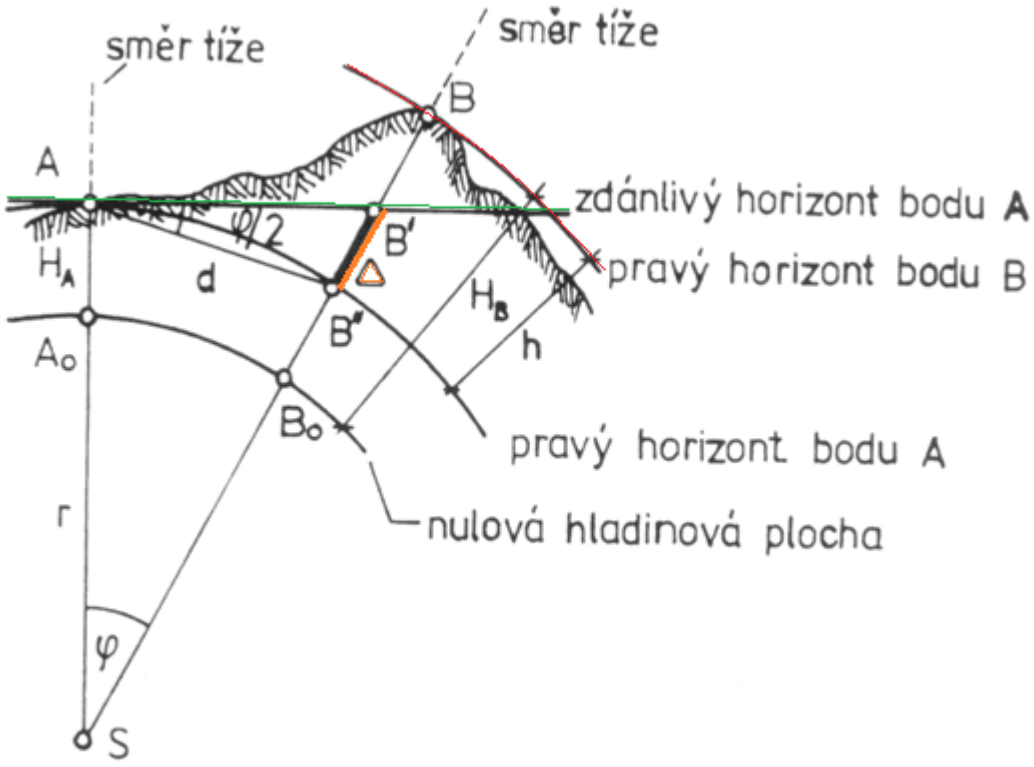
Trigonometrická metoda

Trigonometrická metoda (pokud dostačuje přesností) je výhodná v členitém terénu. Ale při použití na větší vzdálenosti je třeba zavádět opravu ze zakřivení Země.

$$\Delta \cong d \cdot \frac{\varphi}{2},$$

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{d}{2 \cdot r},$$

$$\Delta = \frac{d^2}{2 \cdot r}.$$



Trigonometrická metoda

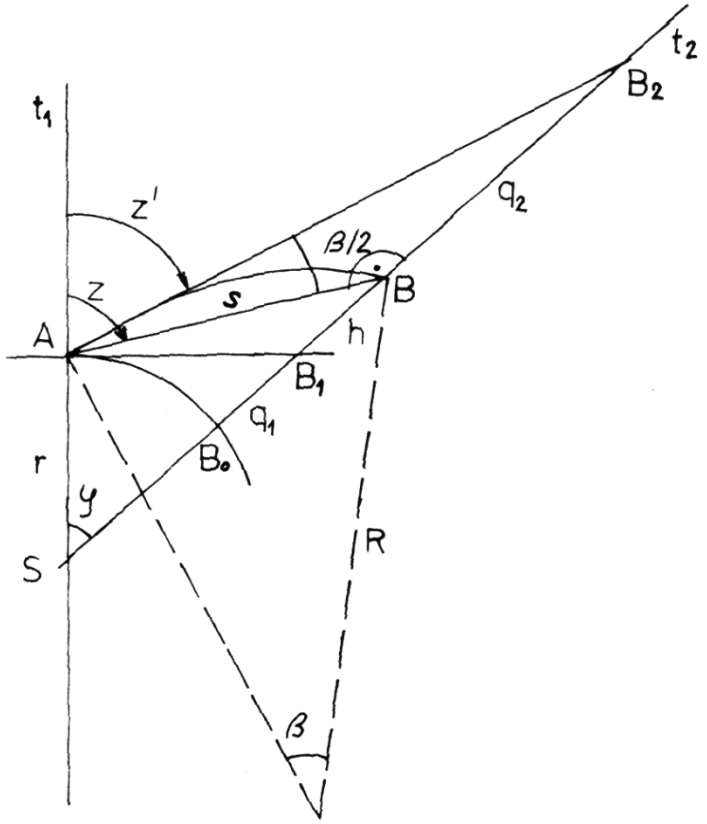
Oprava ze zakřivení Země (poloměr Země 6381 km):

d [m]	Δ [mm]
50	0
100	1
250	5
300	7
350	10
1000	78
5000	1959

Vertikální refrakce

Záměrný paprsek se při průchodu různě hustými vrstvami vzduchu nad Zemí na rozhraní vrstev láme. Skutečnou dráhu paprsku popisuje refrakční křivka. Tvar refrakční křivky (její poloměr) závisí na tzv. refrakčním koeficientu, který se zjišťuje různými fyzikálními a matematickými metodami.

Refrakce (její vertikální složka) má při trigonometrické metodě vliv na měřené zenitové úhly. Rameno měřeného zenitového úhlu je tečnou k refrakční křivce a směřuje do bodu B_2 místo do bodu B. Rozdíl $q_2 = |B_2B|$ je třeba od vypočtené výšky odečíst (pro výpočet tohoto rozdílu je odvozen vztah, q_2 závisí na délce záměry a refrakčním koeficientu).



Geometrická nivelace ze středu, princip

Je to základní, nejpoužívanější a nejpřesnější běžně dostupná metoda. Výšková bodová pole a jejich stabilizace byly navrženy a realizovány pro geometrickou nivelaci.

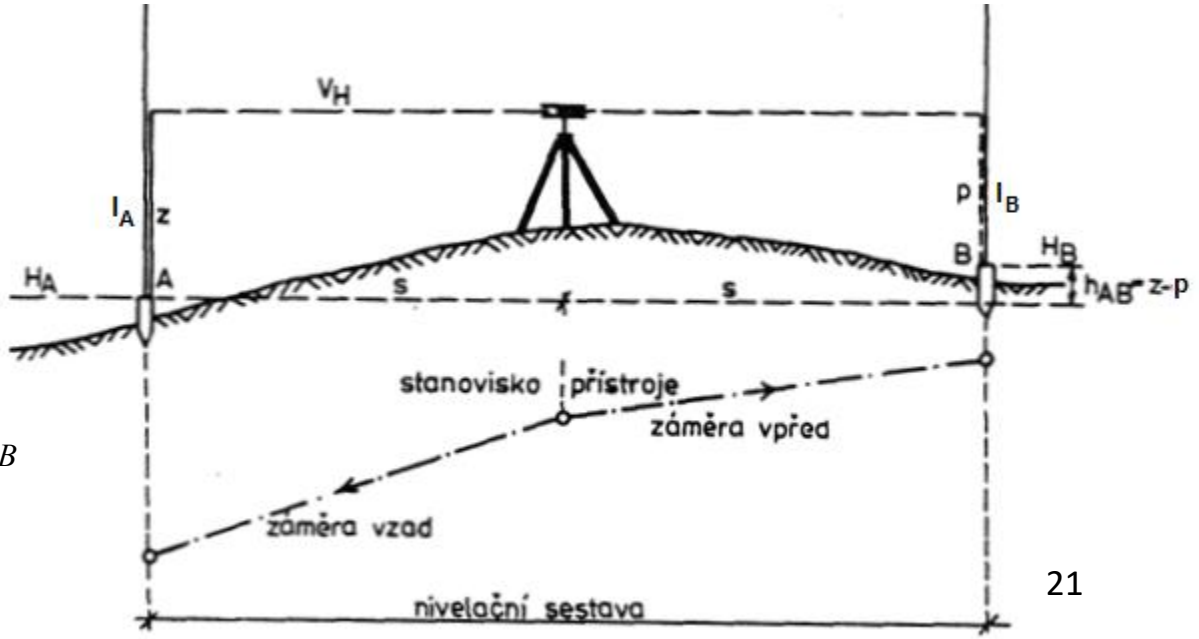
V podstatě jde o určení převýšení dvou bodů z rozdílu výškových odlehlostí od vodorovné roviny, která je buď vytyčena přístrojem nebo jinou pomůckou.

Nivelační sestava – zadní lať + nivelační přístroj + přední lať

$$h_{AB} = H_B - H_A$$

$$h_{AB} = l_A - l_B$$

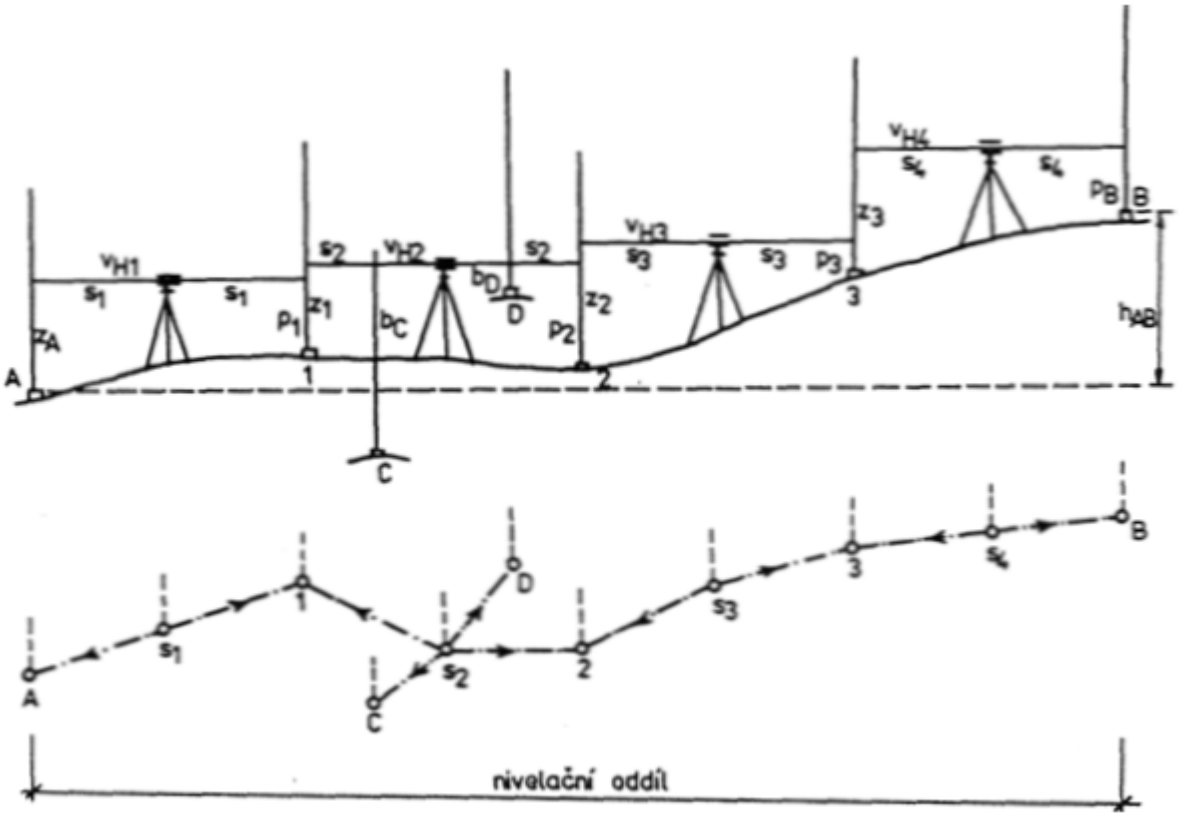
$$H_B = H_A + h_{AB} = H_A + l_A - l_B$$



Geometrická nivelace

V případě větší vzdálenosti bodů A a B nebo většího převýšení se celková vzdálenost rozdělí na několik nivelačních sestav. Pak platí:

$$h_{AB} = \sum z - \sum p$$



Geometrická nivelace

Nivelační sestavy mezi dvěma sousedními body tvoří nivelační oddíly, ty pak tvoří nivelační pořad.

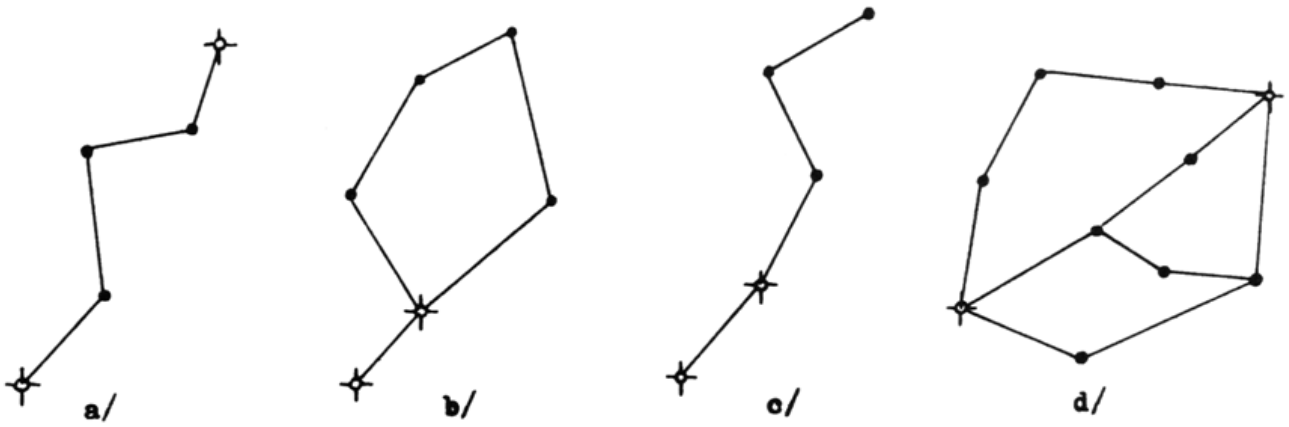
Nivelační pořady:

a) vložené – začíná a končí na dvou známých bodech,

b) uzavřené – začíná a končí na stejném bodě,

c) volné – začíná na známém bodě,

d) tvořící plošnou nivelační síť – zahrnuje alespoň dva známé body a řadu určovaných bodů.



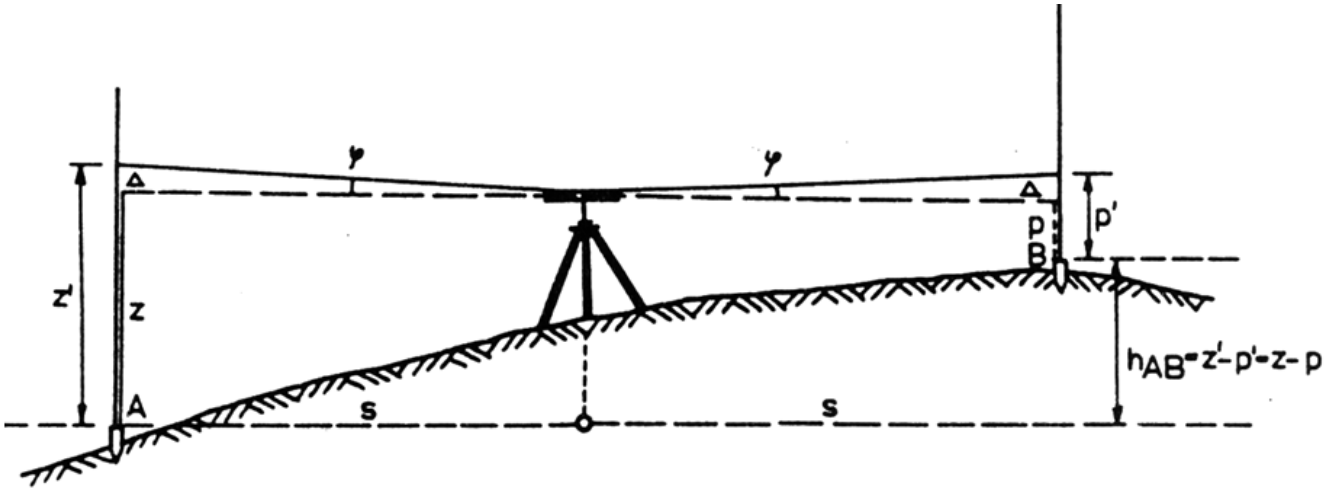
Výhody geometrické nivelace ze středu

Metodou geometrické nivelace ze středu se eliminuje odklon záměry od vodorovné roviny a rozdíl mezi zdánlivým a skutečným horizontem (zakřivení Země). Odklon záměry může být způsoben nerektifikovanou nivelační libelou nebo nepřesnou funkcí kompenzátoru. I při skloněné záměře dostaneme při měření správnou hodnotu převýšení, pokud přístroj stojí uprostřed mezi oběma latěmi.

$$h_{AB} = z' - p'$$

$$z' = z + \Delta$$

$$p' = p + \Delta$$



$$h_{AB} = (z + \Delta) - (p + \Delta) = z - p + \Delta - \Delta = z - p$$

Dělení nivelace dle přesnosti

1. Zvlášť přesná nivelace (ZPN); $\Delta_M \leq 1{,}5 * \sqrt{R}$.
2. Velmi přesná nivelace (VPN); $\Delta_M \leq (1{,}5\text{-}2{,}25) * \sqrt{R}$.
3. Přesná nivelace (PN); $\Delta_M \leq (3\text{-}5) * \sqrt{R}$.
4. Technická nivelace (TN); $\Delta_M \leq (20\text{-}40) * \sqrt{R}$.

R je délka nivelačního pořadu v km, Δ_M je v mm.

Každému typu nivelace je předepsán postup měření a výpočtů, požadavky na přístroje a nivelační latě, a také kritéria přesnosti (mezní rozdíl dvakrát měřeného převýšení).

Typ nivelace je charakterizován směrodatnou kilometrovou odchylkou obousměrně měřeného převýšení σ_{km}.

PN se ve stavební praxi často používá pro přesná měření ($\sigma_{km} \leq 1$ mm).

Zde se budeme zabývat pouze TN, která je ve stavební geodézii nejčastější.

Nivelační přístroje

Nivelační přístroje vytyčují vodorovnou rovinu a dělí se na:

1) optické,
2) elektronické (digitální),
3) laserové.

U **optických nivelačních přístrojů** se čtení na lati realizuje pomocí ryskového kříže v dalekohledu. Dále se dělí podle způsobu urovnání záměrné přímky do vodorovné polohy na:

• libelové – záměra se uvede do vodorovné polohy urovnáním nivelační libely, starší konstrukce, dnes se již nevyrábí.

• kompenzátorové – záměra se urovná samočinně pomocí kompenzátoru. Kompenzátor je vlastně kyvadlo, které se do potřebné polohy uvede působením zemské tíže. Pracuje jen v určitém rozsahu urovnání, je nutné srovnat krabicovou libelu.

Nivelační latě jsou pro TN vybaveny stupnicí s centimetrovým dělením.

Nivelační přístroje

Elektronické nivelační přístroje automatizují měřické i výpočetní práce. Nivelační latě pro tento typ přístrojů jsou opatřeny čárovým kódem, který je po zacílení přístroje a stisku tlačítka na ovládacím panelu přístroje samočinně přečten CCD kamerou, zaregistrován a posléze je proveden výpočet. Jsou tak eliminovány chyby lidského faktoru (chyba ze čtení, zápisu).

Laserové nivelační přístroje realizují záměrnou přímku viditelným laserovým svazkem. K odečtu měřené hodnoty dochází přímo na lati. Přístroje realizují vodorovnou nebo i skloněnou záměrnou přímku Je možné po rozložení svazku do roviny realizovat viditelnou záměrnou rovinu. Využití těchto přístrojů je především na stavbách při liniových nebo plošných nivelacích, při řízení strojů. Měřickou sestavu je možné vybavit automatickým čidlem odečítání.

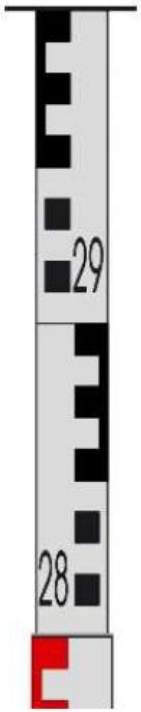
Nivelační přístroje - optické

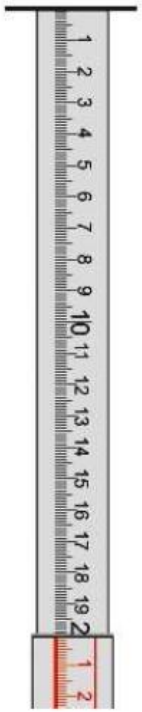
Nivelační přístroje - digitální

Nivelační přístroje - laserové

Nivelační přístroje - příslušenství

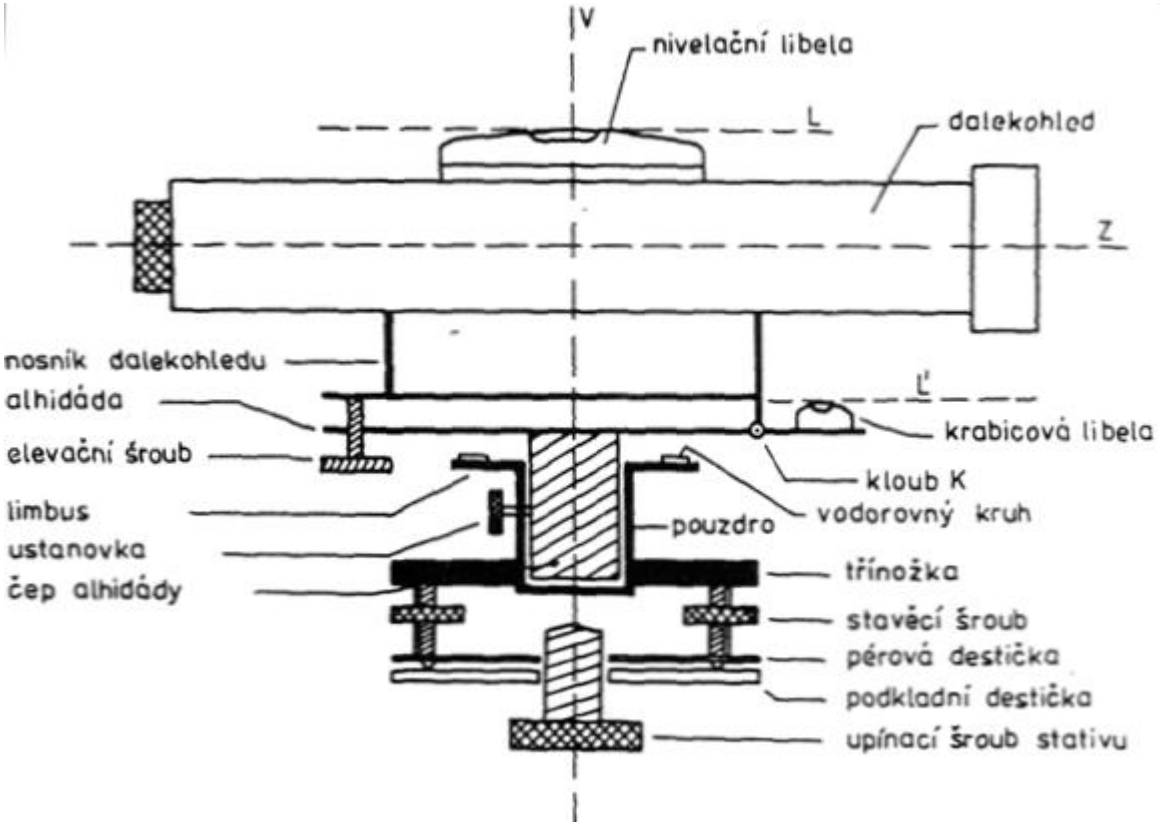
nivelační latě, nivelační podložky





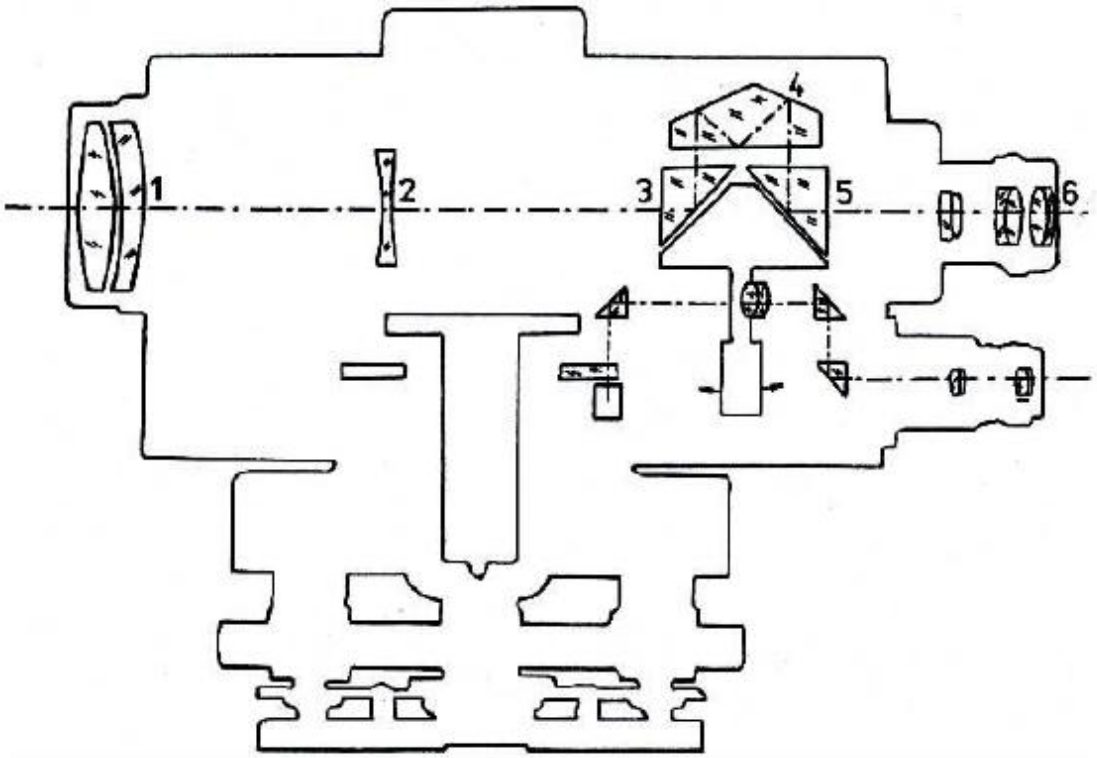
Osové podmínky nivelačních přístrojů s nivelační libelou

1. Osa krabicové libely má být kolmá k vertikální ose L´⊥ V.
2. Vodorovné vlákno ryskového kříže H má být kolmé k vertikální ose H ⊥ V.
3. 0sa nivelační libely má být rovnoběžná se záměrnou přímkou L ∥ Z.



Osové podmínky nivelačních přístrojů s kompenzátorem

Záměra se urovná samočinně pomocí kompenzátoru. Kompenzátor je vlastně kyvadlo, které se do potřebné polohy uvede působením zemské tíže. Pracuje jen v určitém rozsahu urovnání, je nutné srovnat krabicovou libelu.



Polní zkouška nivelačního přístroje

Správné převýšení $h_{AB} = z – p$,

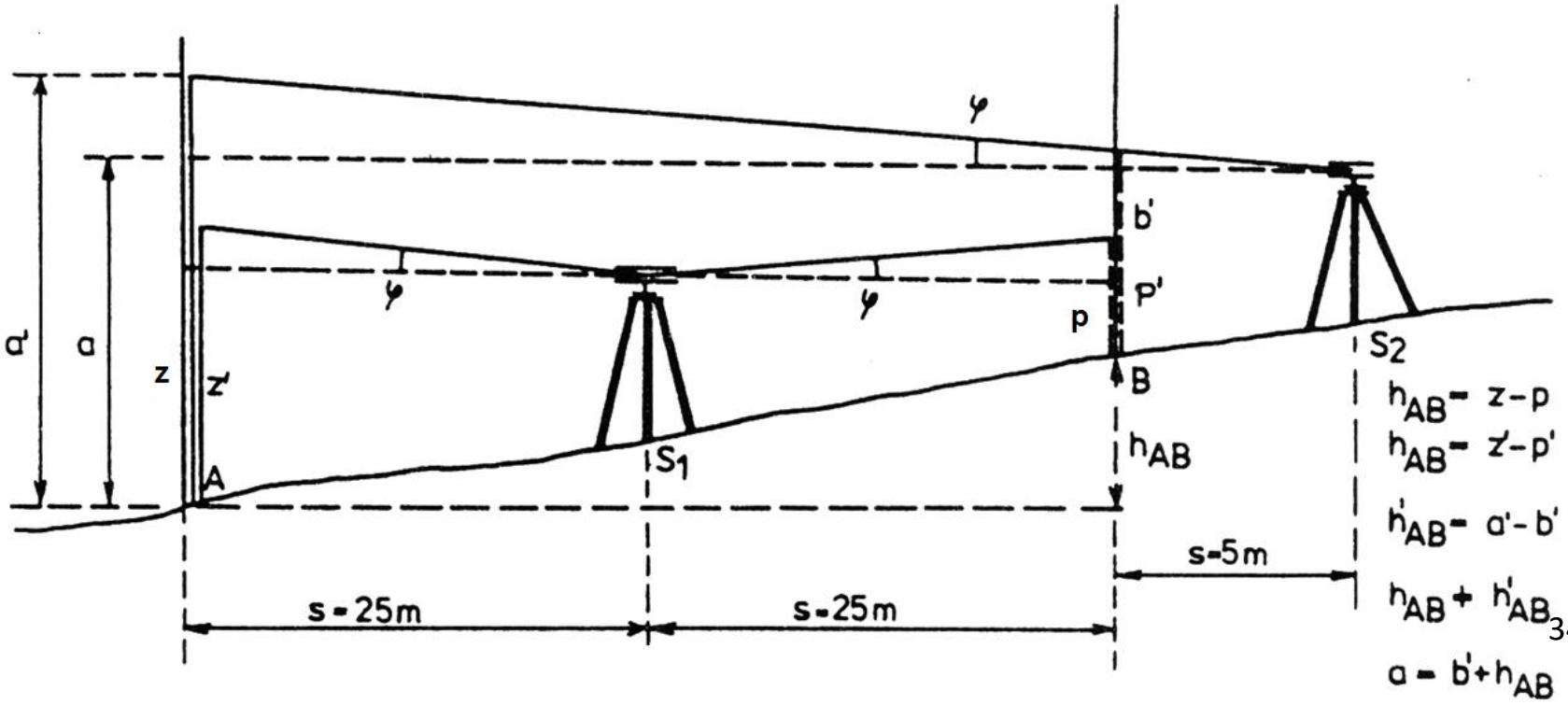
správné převýšení $h_{AB} = z´ – p´$,

kontrolované převýšení $h_{AB}´ = a´ – b´$,

$\phi = (h_{AB} - h_{AB}´)/(2s)$,

kde s je délka záměry ze středu.

Možno zavádět početní opravy pro nestejně dlouhé záměry.



Technická nivelace

Technická nivelace se provádí nivelačními přístroji, pro jejichž směrodatnou kilometrovou odchylku platí skm $\leq$ 5,0 mm, zvětšení dalekohledu je nejméně šestnáctinásobné, citlivost nivelační libely alespoň 60˝ (na 2 mm dílek stupnice) nebo v koincidenční úpravě 80˝ / 2 mm nebo kompenzátor odpovídající přesnosti. Dále se používají nivelační latě dlouhé 2 – 4 m, celistvé nebo různým způsobem skládací se zařízením na zajištění svislosti (krabicová libela) se zřetelným dělením (zpravidla po 0,01 m), a nivelační podložky ploché, kruhové nebo trojúhelníkového tvaru. V případě použití digitálních nivelačních přístrojů a pomůcek by tyto měly splňovat dříve uvedené vlastnosti.

Délky záměr se volí s ohledem na sklonitost terénu, požadovanou přesnost, stav atmosféry, způsob čtení latí. Zpravidla se nerozměřují, ale krokují. Volí nejvýše do 120 m, což je z praktického hlediska hodnota příliš velká, doporučuje se max. 60 m – 80 m.

(**Technologický postup pro technickou nivelaci, Český úřad geodetický a kartografický, Praha 1984.)**

Technická nivelace

Kritéria přesnosti

Vychází z požadavku na maximální směrodatnou kilometrovou odchylku pro TN (5 mm) a dodržení všech uvedených požadavků a navíc při použití celistvých 2-3 m latí a při trvalé stabilizaci připojovacích bodů:

Mezní rozdíl měření tam a zpět:

$$\Delta_M = 20 \cdot \sqrt{L_{km}} \quad [mm].$$

Mezní rozdíl měření tam a známých bezchybných výšek:

$$\Delta_M = 20 \cdot \sqrt{\frac{L_{km}}{2}} \quad [mm].$$

Necelistvé latě, netrvalá stabilizace koncových bodů: 20 → 40.

Druhy nivelace podle použitého postupu

- **nivelace pořadová**
- **nivelace profilů**
- **nivelace plošná**

Nivelace pořadová - postupujeme v sestavách pouze se záměrami vzad a vpřed ve směru od počátečního bodu ke koncovému (boční záměry pouze výjimečně). Pořadová nivelace se používá například při budování nivelačních sítí. Následují příklady zápisníků pro volný a vložený pořad (převzato z přednášek prof. Štronera). Více viz cvičení.

Technická nivelace – volný pořad

Zápisník: měření Tam a Zpět

Zápisník pro technickou a plošnou nivelaci

Číslo bodu		Čtení na lati			Nadmořská výška horizontu stroje	Nadmořská výška bodu		Poznámka
přesta-vového	bočného	vzad +	vpřed −	bočně −		přestavového	určeného bočně	
10		0,861						20 H_{10}= 385,214 m; Bpv
			1,441					20
		1,482						30 $h_{10,8}$= -0,243 m
			1,468					30
		1,659						25 $h_{8,10}$= +0,241 m
			1,499					25
		1,740						30 Δ= 0,002 m
8			1,577					30
		5,742	5,985					210
8		1,570						$\Delta_M = 40 \cdot \sqrt{L_{km}}$
			1,733					
		1,491						$\Delta_M = 40 \cdot \sqrt{0{,}210} = 18\ mm$
			1,651					
		1,465						$\Delta_M > \Delta$ - měření vyhovuje
			1,488					
		1,440						$^{p}h_{10,8}$= -0,242 m
10			0,853					
		5,966	5,725					
								H_8= 384,972 m; Bpv

Technická nivelace – vetknutý pořad

Zápisník – měření tam mezi známými body.

Zápisník pro technickou a plošnou nivelaci

Číslo bodu		Čtení na lati			Nadmořská výška horizontu stroje	Nadmořská výška bodu		Poznámka	
přestavového	bočného	vzad +	vpřed –	bočně –		přestavového	určeného bočně		
10		0,861			386,075	385,214		20	H_{10}= 385,214 m; Bpv
			1,441			384,634		20	H_8 = 384,974 m; Bpv
		1,482	+1		386,117			30	
			1,468			384,649		30	
		1,659	+1		386,309			25	$^{v}h_{10,8}$= -0,240 m
	B1			1,243			385,066		$^{m}h_{10,8}$= -0,243 m
	B2			1,691			384,618		Δ= +0,003 m
21			1,499			384,810		25	
		1,740	+1		386,551			30	
8			1,577			384,974		30	
		5,742	5,985					210	

Kontrola!

$\Delta_M = 40 \cdot \sqrt{L_{km}/2}$

$\Delta_M = 40 \cdot \sqrt{0{,}105} = 13\ mm$

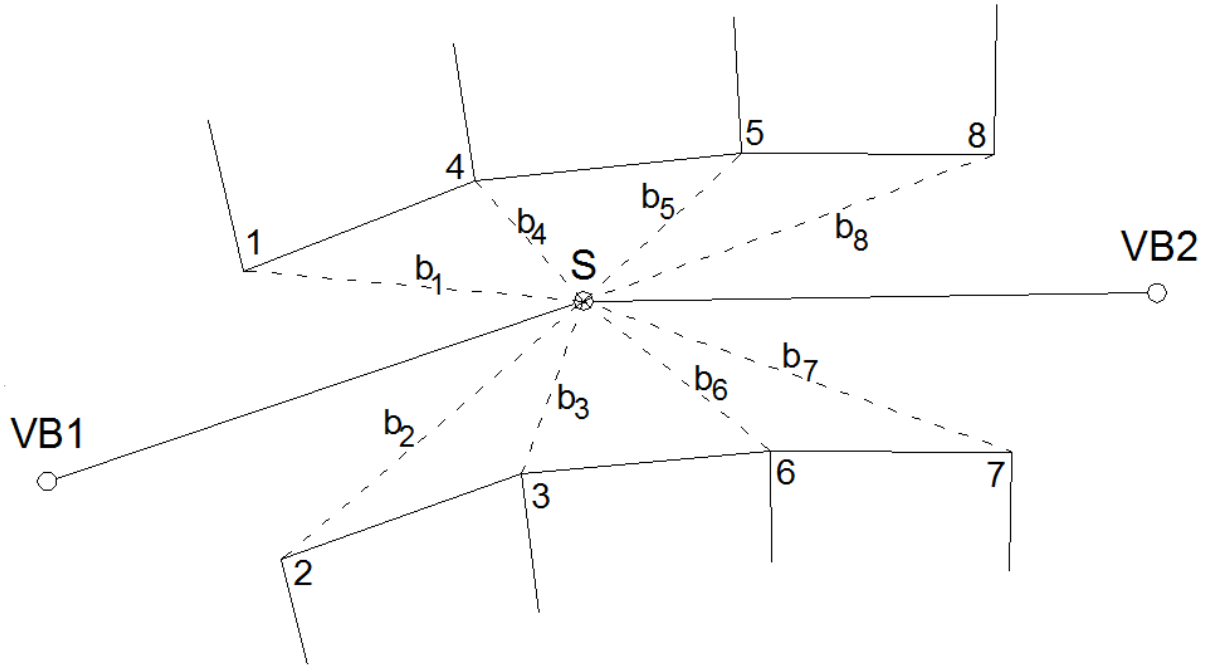
$\Delta_M > \Delta$ - měření vyhovuje

počasí, přístroj, měřil, zapsal, vypočetl, kontroloval!

Plošná nivelace

Doplnění výškopisu do polohopisných map

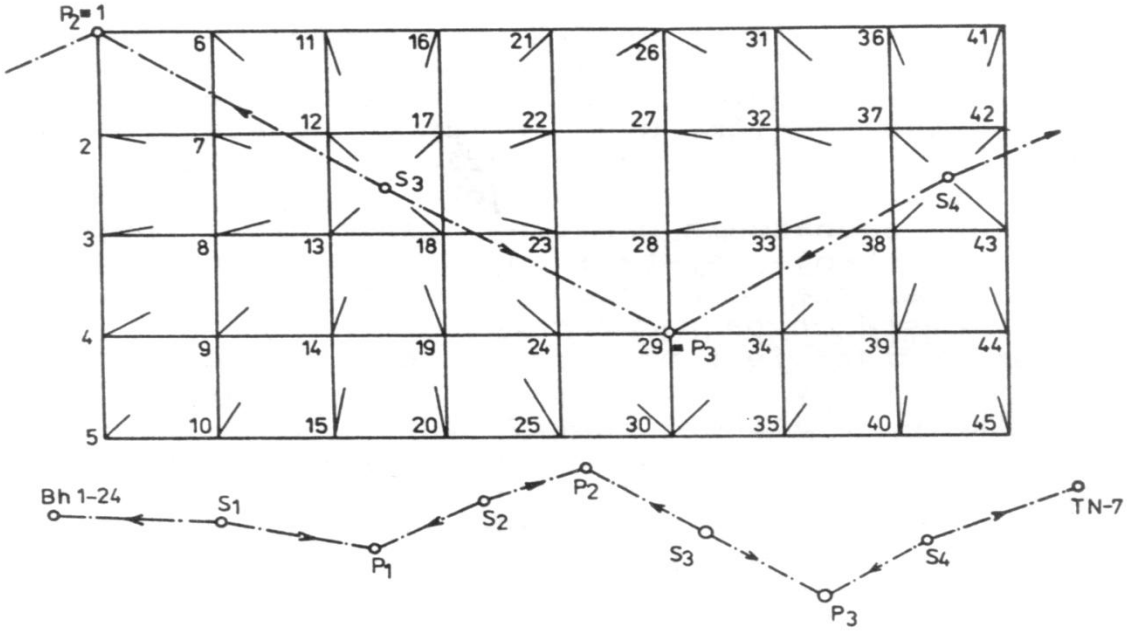
Pro určování výšek podrobných bodů, které jsou již polohově zaměřeny. Grafickým podkladem pro použití této metody je polohopisný plán dané lokality. Základem jsou vložené nivelační pořady technické nivelace. Po záměře vzad na přestavový bod nivelačního pořadu jsou potřebné body zaměřeny bočními záměrami (lať se staví přímo na bod, ne na podložku), poté následuje záměra vpřed na další přestavový bod.



Plošná nivelace

Určování objemů pomocí čtvercové sítě

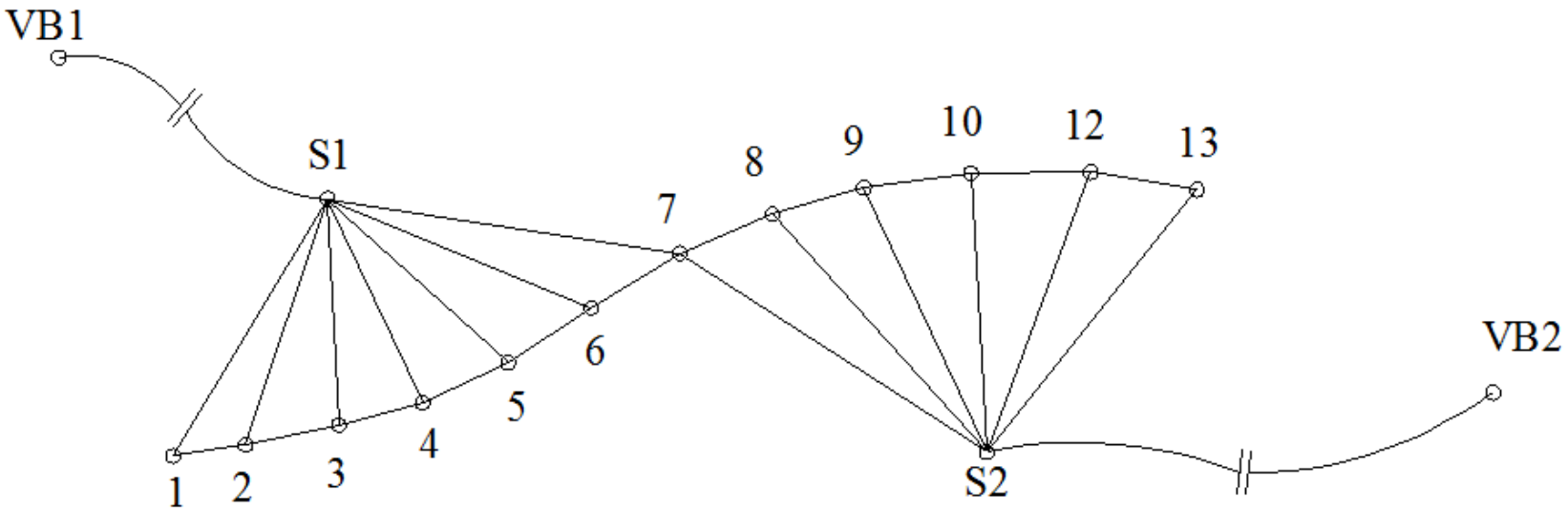
Je často používáno na stavbách v poměrně plochém terénu. V terénu se vyznačí čtvercová síť (např. 10 x 10 m) a její vrcholy se zaměří plošnou nivelací. Z rozdílů projektovaných a skutečných výšek bodů v rozích čtverců se určí násypy a výkopy.



Správnost zaměření bočních bodů není kontrolována, proto je nutné důležité body plošné sítě měřit dvakrát z nezávislých stanovisek.

Měření profilů

Používá se při realizaci liniových staveb nebo úpravě stávajícího stavu.

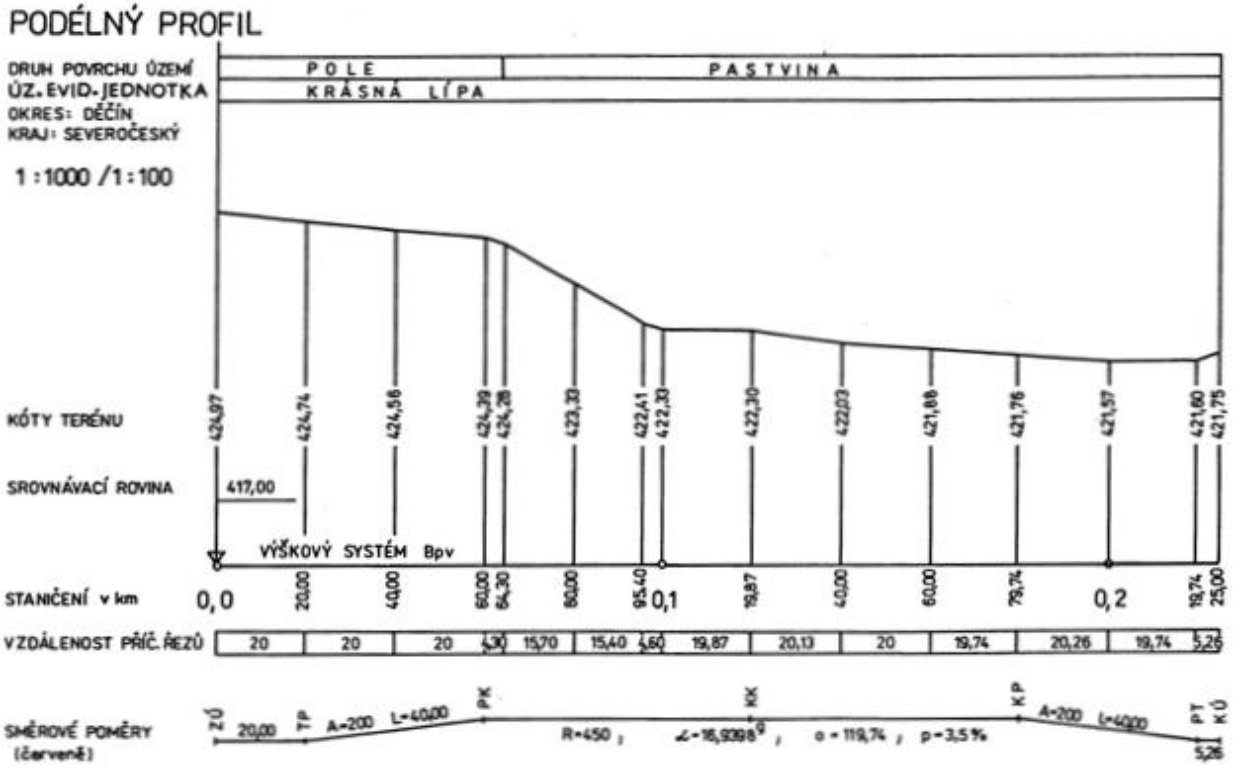


Podélný profil - svislý řez terénem vedený v ose stavby.

Příčný řez - svislý řez terénem vedený kolmo k ose stavby.

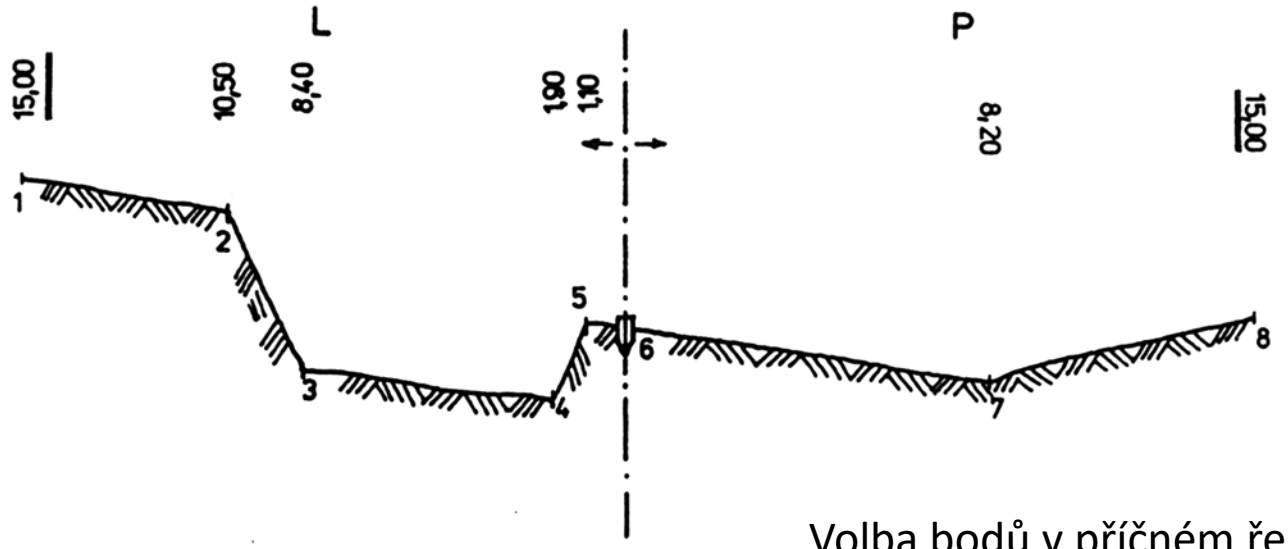
Podélný profil

- podélný profil se zobrazuje na milimetrový papír
- výšky se vynášejí obvykle ve větším měřítku (např. 1:100) než délky (např. 1:1000), aby byly zvýrazněny výškové poměry lokality
- spojením zaměřených a vynesených bodů dostáváme podélný profil terénu
- do podélného profilu se navrhuje niveleta osy liniové stavby většinou tak, aby se násypy a výkopy přibližně rovnaly (rovnost kubatur = minimální zemní práce)



Příčné řezy

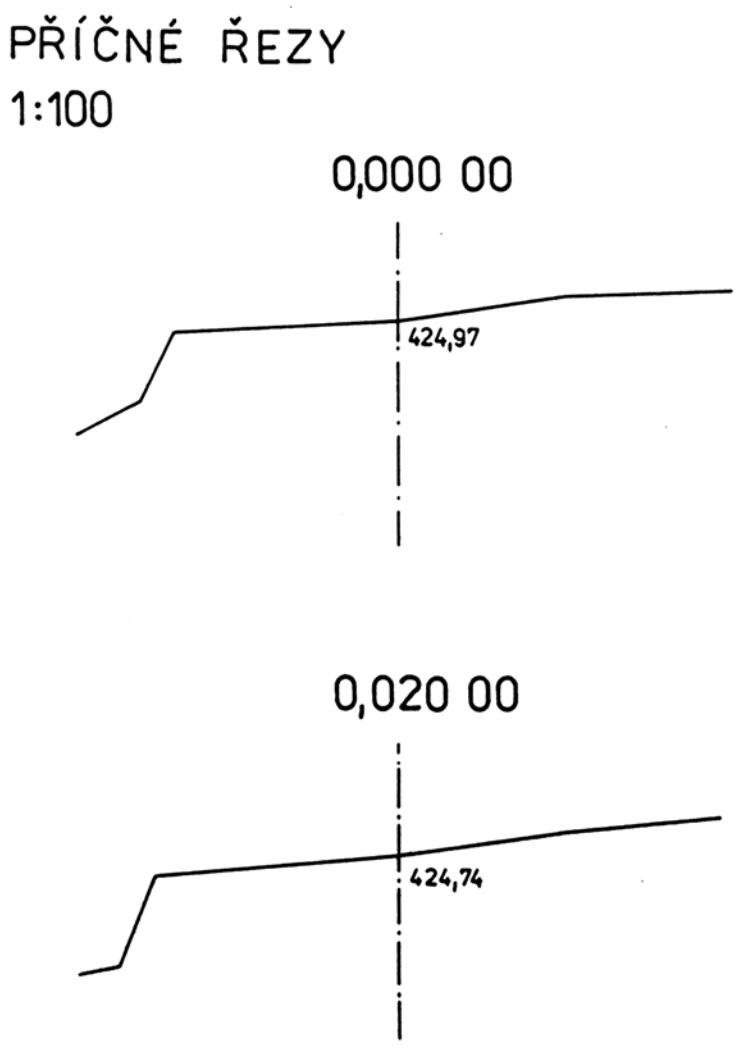
- Jejich množství závisí na členitosti terénu, jejich volba by měla umožnit co nejpřesnější výpočet kubatur.
- Délka řezu na obě strany od osy stavby závisí na rozsahu zemních prací (20– 200 m).
- V místě příčného řezu se vytyčí kolmice k ose stavby.
- Body příčného řezu se zaměřují tak, aby vystihovaly tvar terénu, tj. v místech, kde se terén znatelně láme.
- V přehledném terénu se body příčných řezů zaměřují společně s podélným profilem.



Volba bodů v příčném řezu

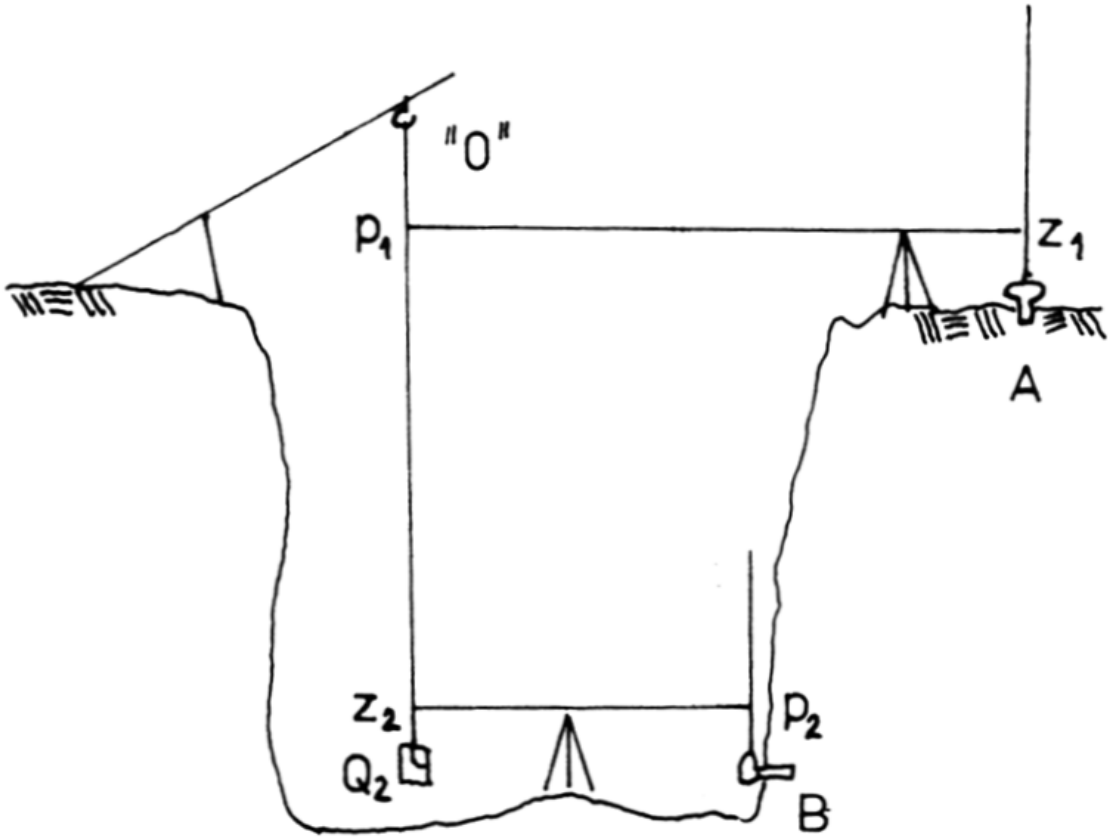
Příčné řezy

Příčné řezy se zobrazují na milimetrový papír, měřítko pro výšky i délky bývá stejné (např. 1:100), aby je bylo možné využít pro výpočet kubatur.



Hloubkové připojení pásmem

Speciálním příkladem aplikace geometrické nivelace je hloubkové připojení pásmem, které se používá pro přenesení výšky do výkopu, kanalizace, dolu či výškové budovy. Znázorněn je případ, kdy je nula pásma nahoře.



$H_B = H_A + z_1 - (z_2 - p_1) - p_2 = H_A + z_1 + p_1 - z_2 - p_2.$