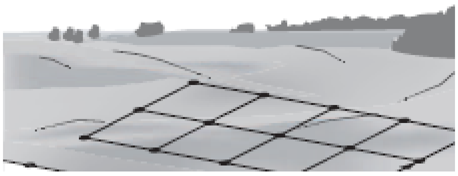
URČENÍ VODOROVNÉ A OBECNÉ ROVINY

(místopisný popis: park v ulici Nikoly Tesly)

Poslední úprava: 23.10.2023 16:36

Pro zaměřený rovinatý terén vypočítat: 1. vodorovnou rovinu tak, aby celkový objem zemních prací byl stejný (násyp = výkop), 2. najít obecnou rovnici roviny, která dobře aproximuje zaměřený terén. Zadané území (ul. Nikoly Tesly, obr. 1) se zaměří polární metodou s výškami z jednoho přechodného stanoviska pomocí totální stanice s ukládáním dat měření do vnitřní paměti přístroje (k polohovému a výškovému připojení se použijí dva body uvedené v tab.). Charakter terénu (pravidelný, málo členitý) umožňuje zvolit k zaměření území pravoúhlou síť (čtvercovou); uzlové body sítě (podrobné body terénu) se určí krokováním. Musí se zvolit tolik podrobných bodů, aby plocha tvořená rovinnými trojúhelníky se co nejlépe přimykala skutečnému terénu (cca 60 bodů).



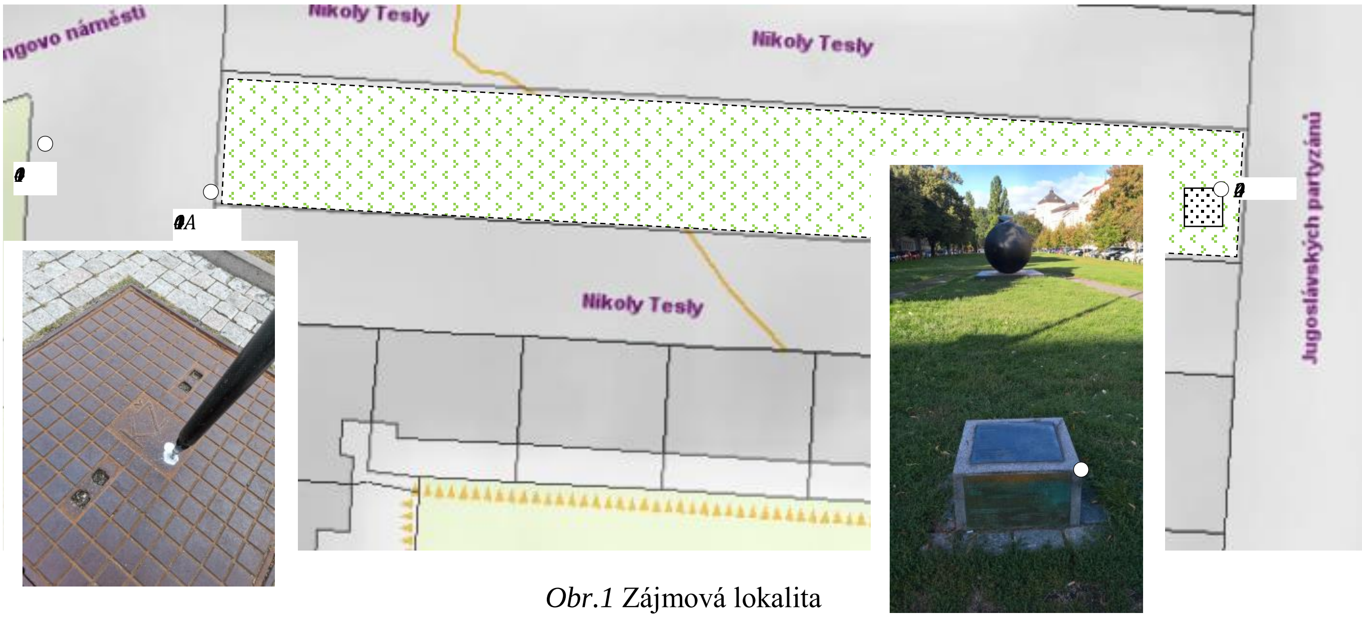
Souřadnice volného polárního stanoviska se určí podobnostní transformací. Transformační klíč se vypočte pomocí dvojice identických bodů *4001A, 4002*, které byly učeny pomocí technologie GNSS v síti referenčních stanic CZEPOS. Souřadnice zaměřených podrobných bodů terénu se určí výpočtem polární metody (rajón - orientace na body *4001, 4002, 60*). Vodorovné směry, zenitové úhly a šikmé délky se měří pomocí totální stanice v jedné poloze dalekohledu vyjma orientací (měří se v obou polohách). Všechna měřená data se ukládají do vytvořené zakázky v přístroji.

Přístroje a pomůcky: totální stanice, stativ, výtyčka s odrazným hranolem.

Souřadnicový systém: S-JTSK

Výškový systém: Bpv.

Bod	Y	X	H	Poznámka
4001	744 596,519	1 040 744,830	211,595	Bod v chodníku
4001A	744 574,294	1 040 755,060	211,340	Železný poklop
4002	744 431,352	1 040 750,564	208,938	Horní roh pamětní mramorové desky
60	744 652,40	1 040 710,65		ZhB



Obr.1 Zájmová lokalita

Nadmořská výška (Bpv) středu přístroje na přechodném stanovisku je

1. $H_P = H_A - \Delta h_A + hr$ … určeno z bodu A

2. $H_P = H_B - \Delta h_B + h_r$ … určeno z bodu B.

Výsledná výška stanoviska je průměr.

Nadmořská výška podrobných bodů je $H_i = H_P + \Delta h_i - h_r$, kde h_r je výška odrazného hranolu nad terénem, převýšení (výškový rozdíl) Δh_i se určí podle poznámky.

POZNÁMKA. Měřené délky se opravují o fyzikální redukce (z teploty a tlaku vzduchu), o matematické redukce (do vodorovné roviny, z nadmořské výšky) a o redukce do zobrazovací roviny S-JTSK.

Postup redukce:

1.Vodorovná délka a výškový rozdíl jsou (odvození se provede snadno podle obr. 3 v U_1 a zároveň se položí cos φ/2 ≈ 1)

$$d_h = d_s \sin (z + \rho - \varphi),$$

$$\Delta h = d_s \cos (z + \rho - \varphi / 2),$$

kde

d_s je měřená šikmá délka

z je měřený zenitový úhel

středový úhel tížnic v <u>gonech</u> $\varphi = 0{,}00998\, d_s\,[\text{km}] \sin z$

ρ je refrakční úhel, v této úloze se refrakční úhel <u>položí nule</u>.

2. Redukce z nadmořské výšky. Průměrná nadmořská výška zájmové lokality je H = 210 m, pak v jednotkách ppm (parts per million) je

$$\Delta D_2 = \left(\frac{R}{R+H} - 1 \right) \cdot 10^6 \, \text{ppm} = -32{,}9 \text{ ppm},$$

zlomek představuje měřítko redukce z nadmořské výšky.

3. Redukce do zobrazovací roviny S-JTSK. Délkové zkreslení je

$$\Delta D_3 = (m-1) \cdot 10^6 = -95{,}8 \text{ ppm},$$

kde m = 0,999904182 je měřítko zobrazení a vypočte se pro střed spojnice identických bodů.

Y = 744 503   X = 1 040 753.

Výsledný měřítkový koeficient q se nastaví v Gromě před zpracováním zápisníku měření (v totální stanici nastavit při měření 1)

$$q = 1 + (\Delta D_2 + \Delta D_3) \cdot 10^{-6} = \mathbf{0{,}9998713} \text{ (-128,7 ppm).}$$

OBSAH ÚLOHY: technická zpráva (obsahuje popis prací v terénu a kancelářských prací, použité přístroje, zhodnocení výsledků, datum a podpis!), zápisník měření (výstupní soubor nezpracovaných dat z geodetického systému Groma uložený do tabulky *.xls,). Výpočet souřadnic stanoviska ručně na kalkulačce nebo v Matlabu. V nezbytné míře uvést obecný postup a vzorce. Následující řešení souřadnic jsou stejná:

a) jako vetknutý PP (podobnostní transformace), osa $+x$ pomocné soustavy II se vkládá do první polygonové strany

b) sólo bod (volné polární stanovisko) pomocí podobnostní transformace (příklad). Souřadnice identických bodů v soustavě II se vypočtou převodem polárních souřadnic (měřené délky a směry) na kartézské (soustava má počátek v bodě P, osa $+x$ je dána postavením nuly na děleném kruhu přístroje) podle obecných vzorců $y = s \sin \psi$, $x = s \cos \psi$, souřadnice stanoviska P jsou $y_P = x_P = 0$ (lze zvolit i nenulové konstanty, např. 700, 1000).

Dále bude úloha obsahovat seznam vypočtených souřadnic a nadmořských výšek podrobných bodů terénu + přiložit protokol o výpočtu. Při realizaci výpočtů v Gromě uložit jako *.xls a zařadit do úlohy, dále uložit do textového souboru *.txt (CB Y X H) bez připojovacích bodů a stanoviska a poslat na svůj e-mail. Seznam souřadnic a nadmořských výšek bodů vypočtené obecné roviny, její rovnici, opravy výšek bodů terénu z vyrovnání (kontrola $\sum v = 0$) a veličinu d, viz dále (souřadnice uložit rovněž do textového souboru *.txt), výpočet roviny se provede v Matlabu + přiložit výpočetní skript. Soubory souřadnic se použijí při zpracování v programu Atlas DMT. Měřický náčrt (nejlépe obrázek z Gromy ve vhodném měřítku na celý list papíru A4, kde budou uvedena čísla podrobných bodů pořadovým číslem, vyznačen obvod zaměřeného území, jeho velikost a výměra, nakreslena měřická síť střídavou čarou, směr k severu a dole uprostřed měřítko náčrtu, v pravém dolním rohu se uvede popisové pole - název obce (Praha 6), katastrálního území (Dejvice), souřadnicový a výškový systém, datum měření, složení měřické skupiny). Výpočet srovnávací roviny v programu Groma (výkres navržené trojúhelníkové sítě, hodnota přibližné nadmořské výšky srovnávací roviny se rovná průměru nadmořských výšek zaměřených podrobných bodů terénu, protokol o výpočtu kubatur), souřadnice bodů nulové čáry, grafické znázornění nulové čáry (dohromady s trojúhelníkovou sítí), bilance objemu zemních prací v části násypové a v části výkopové na základě nového výpočtu objemu (obě části jsou omezeny nulovou čárou a jejich rozdíl musí být nulový). Vypočtené souřadnice a výšky se zaokrouhlují na 3 desetinná místa. Obsahem úlohy je také obecná rovnice roviny, určená pomocí metody nejmenších čtverců (oba tvary rovnice), seznam Y, X, H, bodů roviny, kontrola výpočtu v Gromě (záložka *Nástroje – Vyrovnávací rovina*).

POZNÁMKA. Rozdíl mezi délkou spojnice identických bodů v S-JTSK a délkou určenou v místní soustavě (obě ze souřadnic), nesmí překročit odchylku 0,10 m.

1. Výpočet vodorovné roviny v kostce (obecné řešení)

Podkladem pro výpočet je nepravidelná trojúhelníková síť (*Triangulated Irregular Network*, ve zkratce TIN) vzniklá spojením sousedních podrobných bodů zaměřených polohově (polární metoda) a výškově (trigonometricky). Nepravidelná trojúhelníková síť (obr. 2) se vytvoří ručně. Při automatizovaném zpracování pomocí softwaru se používá Delaunayova triangulace.

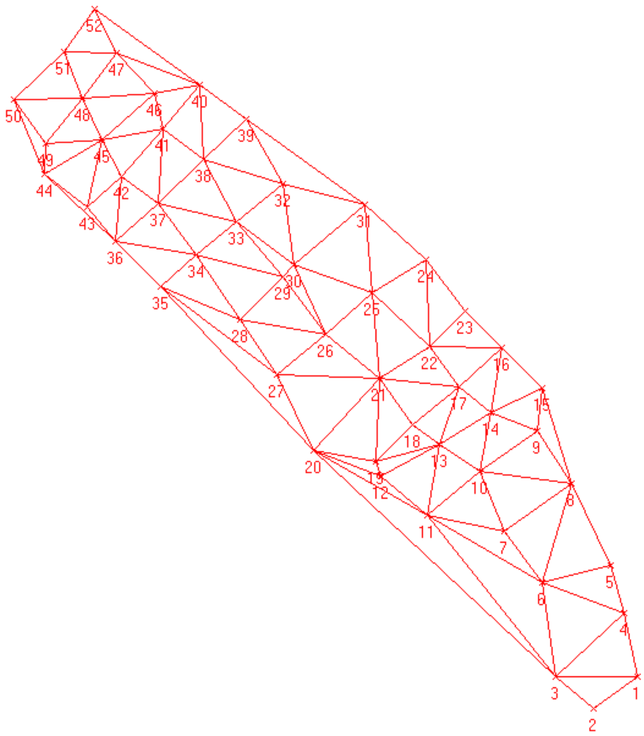
POZNÁMKA. Trojúhelníková síť rozkládá dané území na konečný počet buněk, které se nepřekrývají. Hrany spojující jednotlivé body se neprotínají, každému bodu trojúhelníkové sítě přísluší v případě této úlohy nebo digitálního modelu terénu jedna hodnota (nadmořská výška). Výškové hodnoty na hranách a uvnitř buněk lze určit lineární interpolací – proložením roviny třemi body, které tvoří trojúhelníkovou buňku. Na dané množině bodů lze vytvořit mnoho trojúhelníkových sítí. Obecně platí, že všechny takové trojúhelníkové sítě mají stejný počet buněk ($2n - 2 - k$), kde n je počet bodů trojúhelníkové sítě, k je počet vnějších hran, které tvoří konvexní (vypouklou) obálku množiny vstupních bodů. Podle obr. 2 je $n = 52$, $k = 20$, pak počet buněk je 82. Používá se taková síť, jejíž trojúhelníkové buňky mají co nejkratší hrany.

Trojúhelníková buňka patří do Delaunayovy sítě, jestliže kružnice opsaná nad touto buňkou neobsahuje uvnitř žádný jiný bod ze vstupní množiny bodů. Pokud nastane případ, že opsaná kružnice obsahuje další body, dojde ke změně hran.

Delaunayovu triangulaci lze provést také v Matlabu pomocí funkce

```
TRI = delaunayTriangulation(X,Y)
for i=1:length(TRI.ConnectivityList) %zamena matice indexu za matici odpovidajicich hodnot
for j=1:3
y(i,j)= Y(TRI.ConnectivityList(i,j));
 x(i,j)= X(DT.ConnectivityList(i,j));
 z(i,j)= Z(DT.ConnectivityList(i,j));
 end
end
```

kde X, Y jsou sloupcové vektory. Matice TRI představuje množinu trojúhelníků tvořících triangulaci. Matice má velikost *mtri*3, kde *mtri* je počet trojúhelníků. Každý řádek TRI určuje trojúhelník definovaný indexy vzhledem k bodům.



Obr. 2 Ukázka TIN

Z hlediska prostorového je celé území rozděleno na kolmé trojboké hranoly (výšky bočních rovnoběžných hran jsou nadmořské výšky podrobných bodů, vrchní podstava každého hranolu je šikmo seříznutá rovinným trojúhelníkem, resp. rovinou nerovnoběžnou s podstavou, objem hranolu je $V = P\bar{H}$, kde P obsah dolní podstavy (výměra trojúhelníku), $\bar{H} = \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3}$ je střední výška (= průměr).

Rovnice vodorovné roviny rovnoběžné s rovinou *xy* je $z = K$. Konstanta K představuje úsek na ose z, její přibližná hodnota se určí z průměru nadmořských výšek podrobných bodů terénu, $K_0 = \frac{\sum H_i}{n}$. Takto určená nadmořská výška vodorovné roviny ovšem nesplňuje podmínku, aby součet objemu mezi terénem a srovnávací rovinou byl nulový. Z této podmínky se určí korekce K přibližné hodnoty K_0 nadmořské výšky roviny. Platí $\sum V = \sum P(K_0 + \delta K - \bar{H}) = 0$ (výpočet probíhá po jednotlivých trojúhelnících). Odtud je $\delta K = \frac{-\sum P(K_0 - \bar{H})}{\sum P} = \frac{-\sum V_0}{\sum P}$. Výměra trojúhelníku (obsah dolní podstavy hranolu) se vypočítá jako determinant $2P = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \sum_1^3 x_i\,(y_{i+1} - y_{i-1})$.

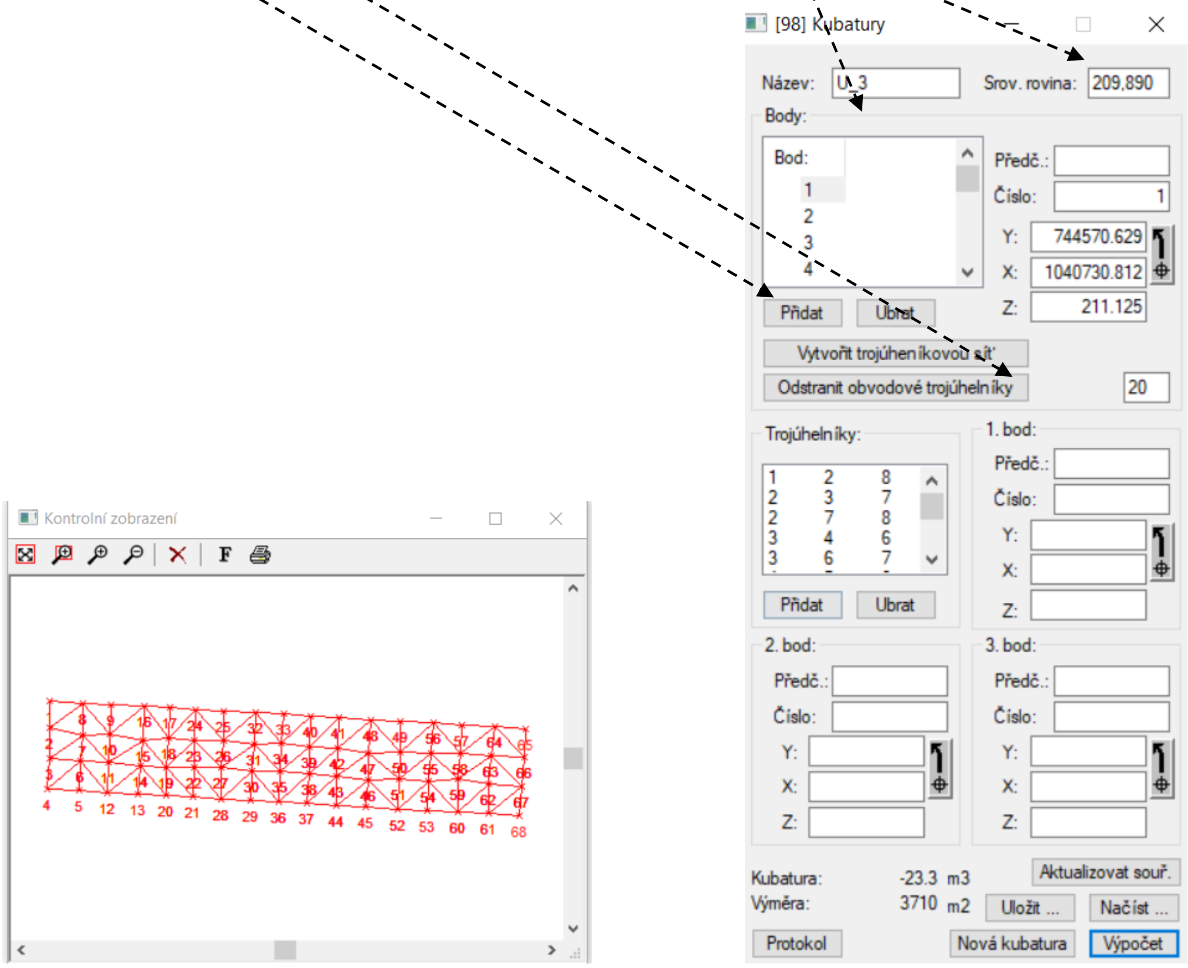
Výsledná nadmořská výška vodorovné roviny je $z = K_0 + \delta K$.

POZNÁMKA. Výslednou výšku lze určit přímo ze vztahu $z = \frac{\sum P\,\bar{H}}{\sum P}$, protože součet rozdílů objemů mezi rovinou a hranolem musí být podle zadaní nulový $\sum V = 0$; jeden rozdílový objem je $\Delta V = P(z - \bar{H})$.

Souřadnice lomových bodů nulové čary (lomená čára, která představuje průsečnici srovnávací roviny s terénem, některé trojúhelníky jsou částečně ve výkopu a částečně v násypu) se vypočítají jako body na přímce a potřebná staničení pomocí lineární interpolace.

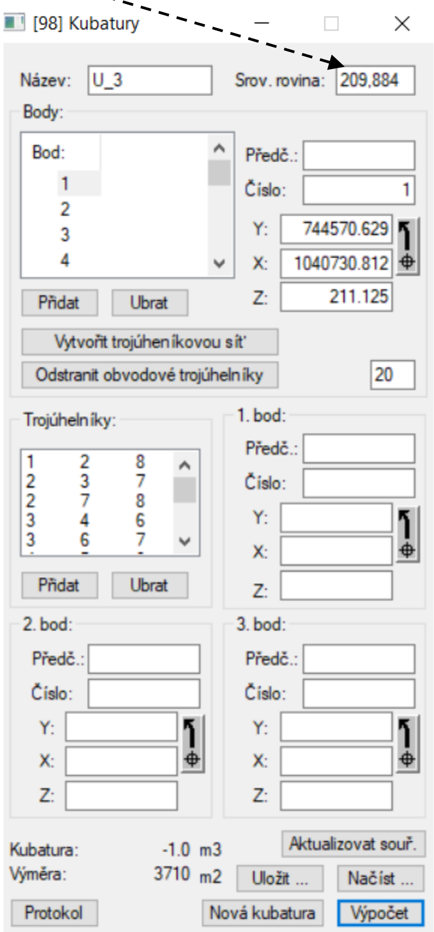
Ukázka výpočtu pomocí programu Groma

Výpočet srovnávací roviny se provede ve výpočtech (Kubatury). Nejdříve se doplní přibližná výška srovnávací roviny K_0 (průměr). Do tabulky Body (obr. 3) se vloží body terénu ze seznamu souřadnic (pravým tlačítkem myši se v seznamu souřadnic body označí, dále Shift + levým tlačítkem myši se hromadně přenesou do tabulky – do výpočtu se vloží celá triangulace). Vytvoří se automatizovaně trojúhelníková síť (obal je konvexní, všechny vnitřní úhly jsou menší než 200 gon) a dále se odstraní štíhlé obvodové trojúhelníky (ručně nebo automaticky se odstraní vnější trojúhelníky, pro něž platí, že poměr délky strany a k ní příslušné výšky je větší, než zadaná hodnota, na obr. 3 hodnota 20).



Obr. 3 TIN a výpočet kubatur

Po výpočtu je V_0 = -23,3 (má býti nula). Korekce $\delta K = \dfrac{-23{,}3}{3710} = -0{,}006\ \mathrm{m}$. Změní se výška srovnávací roviny na hodnotu z =209,884 m (rozdíl kubatur podle nového výpočtu je -1 m^3, přesnost je dostačující, viz obr. 4).



Obr. 4 Výsledná kubatura

Z pracovních kót v_i = z - H_i, (+v nasypat, -v odkopat) a grafického náhledu zjistíme, které strany trojúhelníků protíná nulová čára – sousední kladné a záporné hodnoty pracovních kót.

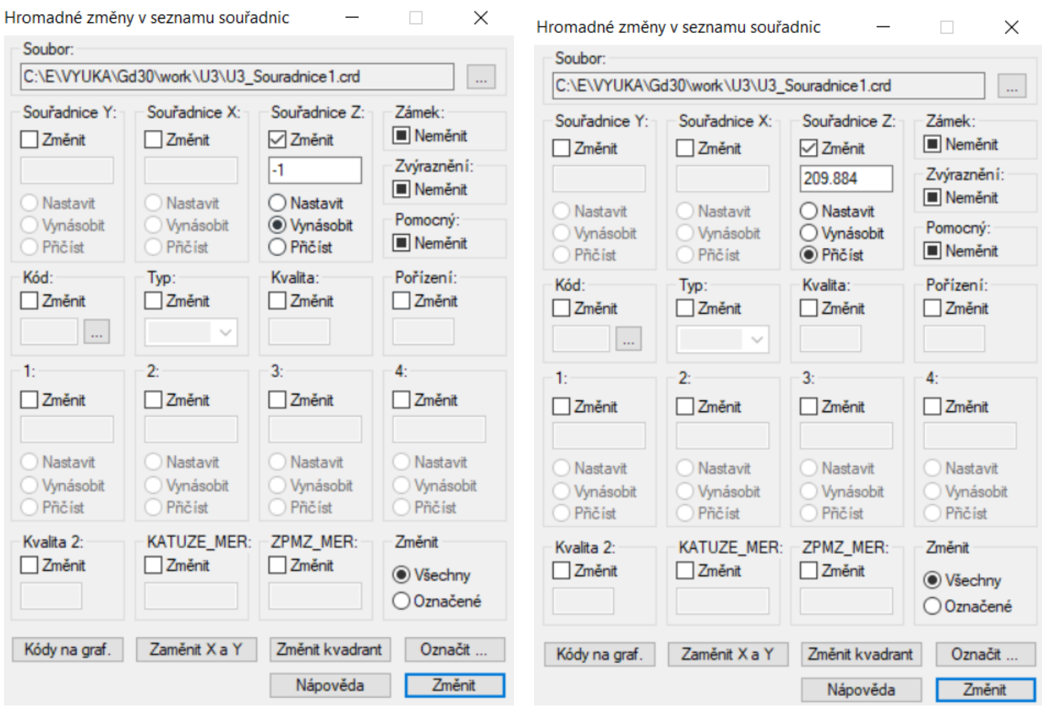
Pracovní kóty se vypočtou pro každý podrobný bod pomocí hromadné změny v seznamu souřadnic pro souřadnici Z (obr. 5).

Body nulové čáry jsou body na přímce, pracovní kóty mají nulové. Potřebná staničení se určí pomocí lineární interpolace (podobnosti trojúhelníků), podle obr. 6 je

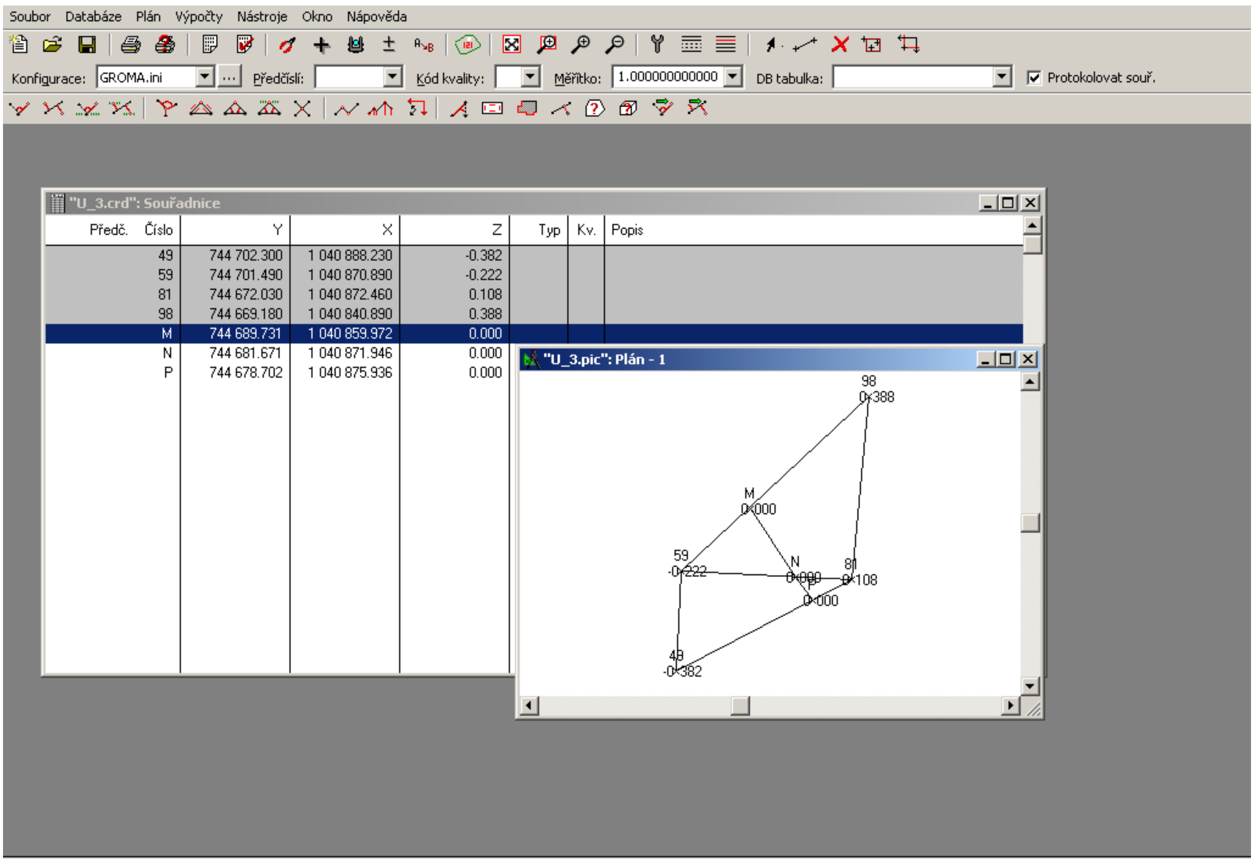
$$\frac{s_{59,M}}{s_{59,98}} = \frac{|v_{59}|}{|v_{59}|+|v_{98}|},\quad s_{59,M} = s_{59,98}\frac{|v_{59}|}{|v_{59}|+|v_{98}|} \quad = \quad 44{,}090\,\frac{0{,}222}{0{,}388+0{,}222} \quad = 16{,}046\ \mathrm{m}.$$

$Y_M = Y_{59} + s_{59,M}\ \Delta Y_{59,98}/s_{59,98}$ = 744 701,49 + 16,046 (-32,31)/44,090 = 744 689,731

$X_M = X_{59} + s_{59,M}\ \Delta X_{59,98}/s_{59,98}$ = 1 040 870,89 + 16,046 (-30,00)/44,090 = 1 040 859,972.



Obr. 5 Výpočet pracovních kót



Obr. 6 Pracovní kóty a souřadnice bodů nulové čáry (M, N, P)

Výpočet obecné roviny (MNČ - metoda nejmenších čtverců)

Body terénu se proloží rovina, jejíž rovnice má tvar

$$z = ax + by + c.$$

Pro soubor zaměřených bodů terénu není rovnice obecně splněna. K nadmořské výšce každého zaměřeného bodu terénu ($z = H$) se připojí oprava v

$$\tilde{z}_i = z_i + v_i = ax_i + by_i + c, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$v_i = ax_i + by_i + c - z_i \dots \text{ rovnice oprav} \qquad (1)$$

kde

neznámé koeficienty a, b a konstanta c se vypočtou vyrovnáním metodou nejmenších čtverců (MNČ)

x_i, y_i, $\tilde{z}_i = z_i + v_i$ jsou souřadnice bodu, který leží v rovině.

Opravy splňují podle MNČ tři matematické podmínky. Z nichž pro jednu platí, že součet oprav nadmořských výšek $\sum v = 0$, pak s využitím (1) je

$$c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y} \dots \text{ úsek na ose } z$$

kde souřadnice $\bar{x} = x_T = \sum x / n$ je souřadnice bodu T (= těžiště), analogicky pro ostatní souřadnice.

Konstanta c se dosadí do hořejší rovnice oprav (1) a po úpravě je

$$v_i = a(x_i - x_T) + b(y_i - y_T) - (z_i - z_T) = a\,x_i' + b\,y_i' - z_i', \qquad (2)$$

kde $x_i' = x_i - x_T$ (kontrola $\sum x_i' = 0$), y_i', z_i' jsou souřadnice redukované k těžišti zaměřených bodů terénu.

Systém rovnic oprav (2) se řeší podle podmínky metody nejmenších čtverců (MNČ)

$$\sum vv = \sum (ax_i' + by_i' - z_i')^2 = \min.$$

Řešením podmínky MNČ dostaneme dvě lineární rovnice (normální rovnice) pro neznámé a, b

$$\begin{bmatrix} \sum x'x' & \sum x'y' \\ \sum x'y' & \sum y'y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x'z' \\ \sum y'z' \end{bmatrix},$$

kde $\sum x'x' = x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2$, $\sum x'y' = x_1'y_1' + x_2'y_2' + \dots + x_n'y_n'$, atd.

Řešení soustavy podle Cramerova pravidla je

$$a = \frac{(\sum x' z')\,(\sum y' y') - (\sum x' y')\,(\sum y' z')}{(\sum x' x')\,(\sum y' y') - (\sum x' y')^2},$$

$$b = \frac{(\sum x' x')\,(\sum y' z') - (\sum x' z')\,(\sum x' y')}{(\sum x' x')\,(\sum y' y') - (\sum x' y')^2}\ .$$

Následuje výpočet oprav nadmořských výšek bodů terénu podle (1) a jejich připojením k nadmořským výškám dostaneme body roviny $x_i, y_i, \tilde{z}_i$, kde $\tilde{z}_i = z_i + v_i$. Vzdálenost roviny od zvlněného terénu lze definovat pomocí vztahu $d = \sqrt{\sum vv}$, pro malé hodnoty d se terén blíží rovině (další porovnání terén versus rovina proběhne v programu Atlas DMT).

POZNÁMKA. Přechod na obecný zápis rovnice roviny

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Jednotkový vektor normály k této rovině je $\mathbf{n} = (A, B, C)^{\mathrm{T}}$.

Hořejší rovnici dostaneme ze tří libovolných bodů roviny určenou z předchozího výpočtu MNČ. Vektor normály **w** je kolmý na vektory **u**, **v**, které určují rovinu (body číslovat v kladném směru)

$$\mathbf{u} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, \tilde{z}_2 - \tilde{z}_1)^{\mathrm{T}}, \mathbf{v} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, \tilde{z}_3 - \tilde{z}_1)^{\mathrm{T}}.$$

Řešení: $\mathbf{w} = \mathbf{u}\ \mathbf{v}$ (vektorový součin, v Matlabu w = cross(u, v))

$\mathbf{w} = ((y_2 - y_1)\,(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1) - (y_3 - y_1)\,(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1), (x_3 - x_1)\,(\tilde{z}_2 - \tilde{z}_1) - (x_2 - x_1)\,(\tilde{z}_3 - \tilde{z}_1),$
$(x_2 - x_1)\,(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)\,(y_2 - y_1))^{\mathrm{T}}.$

Tento vektor se dále normuje, souřadnice jednotkového vektoru normály jsou (A, B, C), konstanta D se dopočítá z obecné rovnice.

<table>
<tr><td colspan="6" align="center">ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ
KATEDRA SPECIÁLNÍ GEODÉZIE
STUDIJNÍ PROGRAM: GEODÉZIE A KARTOGRAFIE</td></tr>
<tr><td colspan="6">Název předmětu
GEODÉZIE 3</td></tr>
<tr><td>Úloha
U_3</td><td colspan="5">Název úlohy
URČENÍ VODOROVNÉ A OBECNÉ ROVINY</td></tr>
<tr><td>2023/2024</td><td>3. semestr</td><td>Studijní skupina</td><td>Zpracoval:</td><td>Datum</td><td>Klasifikace</td></tr>
</table>