

Určení vlivu vertikální složky refrakce na měřené zenitové úhly Sanchezovou metodou

Doc. Ing. Radim Blažek, ČSc.,
Dr. Ing. Zdeněk Skořepa,
katedra geodézie a pozemkových
úprav FSv ČVUT v Praze

528.11:535.3

Abstrakt

Cílem příspěvku je aktualizovat 40 let starou metodu, experimentálně ověřenou převážně na velké vzdálenosti ve vysokohorském terénu, pro praktické využití na našem území s cílem přesnějšího určení vlivu refrakce na měřené zenitové úhly a následně i trigonometrických výškových rozdílů v souvislosti s novými možnostmi určování šikmých délek metodou GPS.

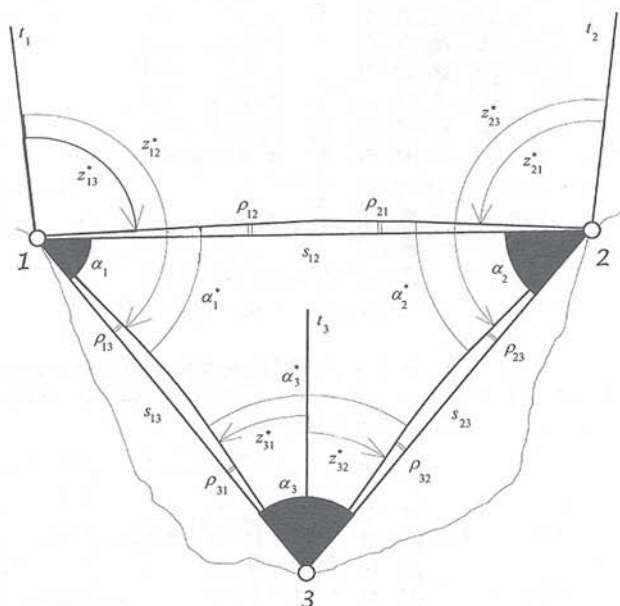
Determination of Vertical Refraction Component Influence on Measured Zenith Distances by Sanchez Method

Summary

The paper tries to update the 40-years-old method that was experimentally tested mostly on large distances in high mountains to practical application on our territory aiming to more accurate determination of refraction influence to zenith distances and following to trigonometric altitude differences in connection with new possibilities to determine oblique distances by GPS method.

1. Princip metody

Sanchezova metoda podle [4] určuje obecně šest refrakčních úhlů $\rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{32}$ pomocí měřených zenitových úhlů $z^*_{12}, z^*_{13}, z^*_{32}$ (ovlivněných refrakcí) a měřených šikmých délek s_{12}, s_{13}, s_{32} ve svislém trojúhelníku 123 (obr. 1). Pro praktické využití metody jsou body 1 a 2, jejichž nadmořskou výšku chceme určit, na vrcholcích kopců a bod 3 je zvolen (jeho výšku lze určit geometrickou nivelací) v údolí ve svislé rovině proložené oběma určovanými body. Z rozdílu měřených



Obr. 1 Svislý trojúhelník (k odvození rovnic 1 až 3)

zenitových úhlů lze snadno určit v tomto trojúhelníku úhly α_1, α_2 a α_3 (jsou ovlivněny refrakcí). Odpovídající úhly α_1, α_2 a α_3 se vypočtou pomocí kosinové věty.

Tento experiment je velmi jednoduchý, ale jeho úspěšnost je závislá na přesnosti měřených délek, dále na konfiguraci bodů, respektive tvaru svislého trojúhelníka (jeho ploše P). Klesá od ideálního rovnoramenného trojúhelníka (viz dále) až po štíhlý trojúhelník a dále vlivem relativních tížnicových odchylek na měřené zenitové úhly (pro délky do 3 km lze vliv relativních tížnicových odchylek na měřené zenitové úhly na území České republiky zpravidla zanedbat).

Poznámka: Mezi měřenými délkami a vypočteným úhlem α_1 platí vztah $\alpha_1 = \arccos \frac{s_{12}^2 + s_{13}^2 - s_{23}^2}{2 s_{12} s_{13}}$. Skutečná chyba vypo-

čteného úhlu α_1 je $\epsilon_{\alpha_1}^{cc} = \rho^{cc} \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{12}} \epsilon_{s_{12}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{13}} \epsilon_{s_{13}} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{23}} \epsilon_{s_{23}} \right)$,

$$\text{kde } \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{12}} = \frac{s_{13} \cos \alpha_1 - s_{12}}{s_{12} s_{13} \sin \alpha_1} = \frac{s_{13} \cos \alpha_1 - s_{12}}{2 P},$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{13}} = \frac{s_{12} \cos \alpha_1 - s_{13}}{2 P} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{23}} = \frac{s_{23}}{2 P}$$

Skutečné chyby všech vypočtených úhlů jsou $(\epsilon_{\alpha_1}^{cc}, \epsilon_{\alpha_2}^{cc}, \epsilon_{\alpha_3}^{cc})^T = \mathbf{A} (\epsilon_{s_{12}}^{cc}, \epsilon_{s_{13}}^{cc}, \epsilon_{s_{23}}^{cc})^T$,

kde modelová matice

$$\mathbf{A} = \frac{\rho^{cc}}{2 P} \begin{pmatrix} s_{13} \cos \alpha_1 - s_{12} & s_{12} \cos \alpha_1 - s_{13} & s_{23} \\ s_{23} \cos \alpha_2 - s_{12} & s_{13} & s_{12} \cos \alpha_2 - s_{23} \\ s_{12} & s_{23} \cos \alpha_3 - s_{13} & s_{13} \cos \alpha_3 - s_{23} \end{pmatrix}$$

je řádu 3.

Kovarianční matice je $\mathbf{C}_\alpha = \sigma_s^2 \mathbf{A} \mathbf{A}^T$, kde σ_s^2 je variance měřených délek (pro délky určené z měření GPS (Global Positioning System) jsme položili $\sigma_{s_{12}} = \sigma_{s_{13}} = \sigma_{s_{23}} = \sigma_s$).

Pro určení optimálního tvaru svislého trojúhelníka uvažujeme dále rovnoramenný trojúhelník se základnou s ($= s_{12}$) a úhel při základně α ($= \alpha_1 = \alpha_2$). Variance vypočteného úhlu je $(\sigma_{\alpha}^{cc})^2 = \left(\rho^{cc} \frac{\sigma_s}{s}\right)^2 \left(\cotg^2 \alpha + \frac{1 + \cos^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha}\right) = \left(\rho^{cc} \frac{\sigma_s}{\alpha}\right)^2 T^2$ (T je součinitel tvaru svislého trojúhelníka). Variance úhlu nabývá svého minima pro $\alpha \doteq 76,144^\circ$ a součinitel tvaru je $T_{\min}^2 = 1,9282$ (obr. 2); pro rovnostranný trojúhelník je $T^2 = 2$.

K významnějšímu oživení Sanchezovy metody může v současné době dojít především díky možnostem přesnějšího určení šikmých délek pomocí technologie GPS. Výsledkem mohou být nejenom přesněji určené nadmořské výšky bodů na vrcholcích kopců, např. pro sledování vertikálních pohybů zemské kůry, ale především možnosti určení vertikální složky refrakce nebo ověření platnosti používaných refrakčních modelů. Před vlastním řešením je nutné nejprve upravit měřené prvky, tj. redukovat měřené šikmé délky a zenitové úhly na spojnicí stabilizačních značek.

2. Geometrické podmínky (jejich řešení)

Ve svislém trojúhelníku 1 2 3 lze sestavit šest geometrických podmínek pro určení refrakce z geodetického měření:

a) z rozdílů úhlů vypočtených jednak z délek a jednak z měřených zenitových úhlů dostaneme tři lineární rovnice – obr. 1. Každá obsahuje dva z celkem šesti neznámých refrakčních úhlů, tedy

$$1) \rho_{13} - \rho_{12} = \arccos \frac{s_{12}^2 + s_{13}^2 - s_{23}^2}{2 s_{12} s_{13}} - (z_{13}^* - z_{12}^*) = w_1,$$

$$2) \rho_{23} - \rho_{21} = \arccos \frac{s_{12}^2 + s_{23}^2 - s_{13}^2}{2 s_{12} s_{23}} - (z_{23}^* - z_{21}^*) = w_2,$$

$$3) \rho_{31} + \rho_{32} = \arccos \frac{s_{13}^2 + s_{23}^2 - s_{12}^2}{2 s_{13} s_{23}} - (z_{31}^* + z_{32}^*) = w_3;$$

součet $w_1 + w_2 + w_3$ je úhlový uzávěr ve svislém trojúhelníku, b) druhou skupinu tří lineárních rovnic pro každé dva neznámé refrakční úhly napíšeme pomocí známých vztahů, které platí mezi oboustranně měřenými zenitovými úhly a středovým úhlem φ (obr. 3), tedy

$$4) \rho_{12} + \rho_{21} = (200^\circ + \varphi_{12}) - (z_{12}^* + z_{21}^*) = w_4,$$

$$5) \rho_{23} + \rho_{32} = (200^\circ + \varphi_{23}) - (z_{23}^* + z_{32}^*) = w_5,$$

$$6) \rho_{13} + \rho_{31} = (200^\circ + \varphi_{13}) - (z_{13}^* + z_{31}^*) = w_6.$$

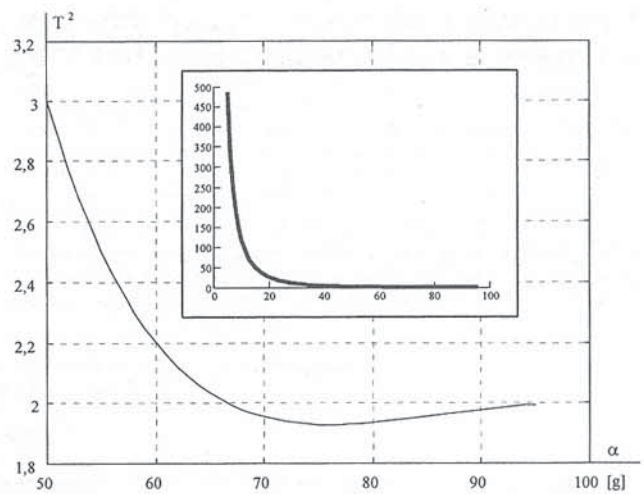
Těchto šest lineárních rovnic se zapíše maticově $\mathbf{D}\rho = \mathbf{I}$. V rozepsané podobě je

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{12} \\ \rho_{13} \\ \rho_{21} \\ \rho_{23} \\ \rho_{31} \\ \rho_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

kde matice soustavy \mathbf{D} řádu 6 je singulární, hodnota $h(\mathbf{D}) = 5$.

Soustavu lineárních rovnic (1) řešíme dále pomocí singulárního rozkladu. Podle [3] se určí singulární rozklad matice soustavy

$$\mathbf{D} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T, \quad (2)$$



Obr. 2 Součinitel T^2 tvaru svislého trojúhelníka

kde \mathbf{U} , \mathbf{V} a \mathbf{S} označují čtvercové ortonormální matice a diagonální matice s prvky $\sigma_{ii} = \sigma_i \geq 0$. Čísla σ_i jsou singulární čísla matice \mathbf{D} ; její hodnota je rovna počtu nenulových singulárních čísel matice

$$\mathbf{S} = \text{diag} (2; 1,7320508; 1,7320508; 1; 1; 0).$$

Za matice soustavy (1) se dosadí její singulární rozklad podle (2)

$$\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T \rho = \mathbf{w}$$

a označí se $\mathbf{V}^T \rho = \mathbf{z}$ a $\mathbf{U}^T \mathbf{w} = \mathbf{d}$.

Potom místo soustavy (1) se řeší soustava $\mathbf{S}\mathbf{z} = \mathbf{d}$. V rozepsané podobě je

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix} \quad (3)$$

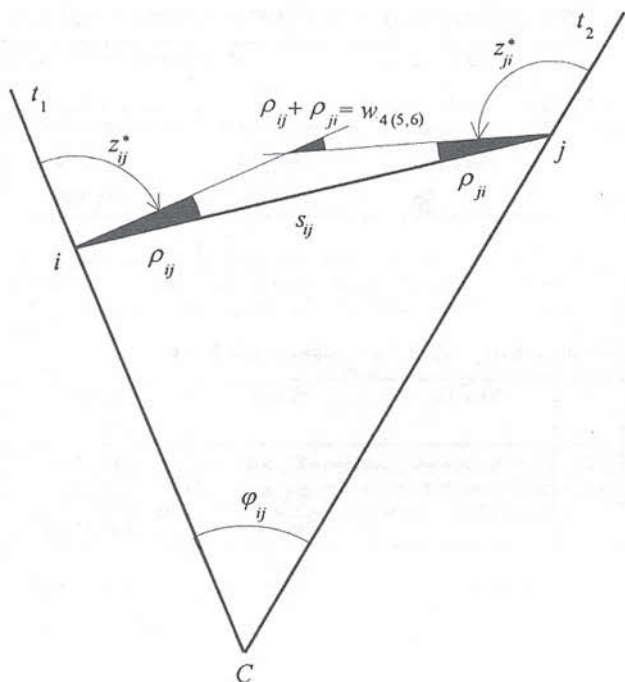
$$z_i = \frac{d_i}{\sigma_i}, \quad \sigma_i \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5,$$

$$\mathbf{z}_1 = (z_1, z_2, \dots, z_5)^T,$$

$$z_6 \text{ libovolné pro } \sigma_6 = 0.$$

Také platí $\mathbf{z}_1 = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{d} = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}^T \mathbf{w}$, kde regulární matice \mathbf{S}_1 řádu 5 dostaneme z matice \mathbf{S} vynecháním posledního (nulového) řádku a sloupce a matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ je typu } (5, 6).$$



Obr. 3 Oboustranně zaměřená spojnice (k odvození rovnic 4 až 6)

Zpětnou substitucí $\rho = \mathbf{V} \mathbf{z}$ dostaneme obecné řešení úlohy

$$\rho = \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{15} & V_{16} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{V}_1 & \vdots & \mathbf{V}_2 \\ V_{61} & \dots & V_{65} & V_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_5 \\ z_6 \end{pmatrix} = \mathbf{V}_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_5 \end{pmatrix} + z_6 \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_1 \mathbf{z}_1 + z_6 \mathbf{V}_2 \quad (4)$$

Tab. 1 Vypočtené refrakční úhly

Spojnice	4. 9. 2001	4. 9. 2001	$\rho(\text{cc})$			19. 4. 2002	19. 4. 2002	$\rho(\text{cc})$		
	Šikmá délka (m)	Zenitový úhel (g)	(1)	(2)	(3)	Šikmá délka (m)	Zenitový úhel (g)	(1)	(2)	(3)
	$\mathbf{w} = (-6^{\text{cc}}; -12^{\text{cc}}; +19^{\text{cc}}; +57^{\text{cc}}; +26^{\text{cc}}; +32^{\text{cc}})^T$					$\mathbf{w} = (-16^{\text{cc}}; -21^{\text{cc}}; +18^{\text{cc}}; +55^{\text{cc}}; +16^{\text{cc}}; +19^{\text{cc}})^T$				
1-2		100,84419	27,4	28,6	28,5		100,84432	26,1	27,3	26,3
2-1	2887,2638	99,17890	29,7	28,6	28,6	2887,2513	99,17902	28,5	27,3	28,3
1-3		105,91960	21,6	22,7	22,6		105,92053	10,5	11,7	10,7
3-1	1461,0171	94,09170	10,4	9,3	9,4	1461,0085	94,09202	9,0	7,8	8,8
2-3		104,34497	17,3	16,2	16,3		104,34576	7,6	6,4	7,4
3-2	1435,6082	95,66676	8,4	9,5	9,4	1435,6036	95,66692	8,6	9,8	8,8

Tab. 2 Refrakční koeficienty $k (= 2\rho/\varphi)$ vypočtené z refrakčních úhlů tab. 1

Spojnice	Středový úhel (g)	4. 9. 01			19. 4. 02		
		(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
1-2		0,19	0,20	0,20	0,18	0,19	0,18
2-1	0,0288	0,21	0,20	0,20	0,20	0,19	0,20
1-3		0,30	0,31	0,31	0,14	0,16	0,15
3-1	0,0145	0,14	0,13	0,13	0,12	0,11	0,12
2-3		0,24	0,23	0,23	0,11	0,09	0,10
3-2	0,0143	0,12	0,13	0,13	0,12	0,14	0,12

Tab. 3 Odhad středních chyb vypočtených refrakčních úhlů; $\sigma_z = 3^{\text{cc}}$ a $\sigma_s = 1,5 \text{ mm}$

Spojnice	$\sigma_\rho (\text{cc})$	
	Vliv zenitových úhlů	Souhrnný vliv
1-2, 2-1	2,7	2,7
1-3, 3-1	2,7	7,6
2-3, 3-2	2,7	7,6

1) Vybere se řešení, které má $z_6 = 0$ ($z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_3^2 = \rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \dots + \rho_{32}^2 = \min$).

Další možnost jak zvolit volný parametr z_6 v (4) je dána na základě hypotéz:

- 2) $\rho_{12} = \rho_{21}$ (konstantní refrakční úhel, respektive konstantní refrakční koeficient pro záměru 1-2 a 2-1),
- 3) $\rho_{31} = \rho_{32}$ (konstantní refrakční koeficient pro stanoviško 3).

Poznámka. Kovariační matice vypočtených refrakčních úhlů (4) je

$$\mathbf{C}_\rho = \sigma_z^2 \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_1^T + \mathbf{V}_1 \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}^T \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\rho & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{U} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{V}_1^T \quad (5)$$

kde σ_z^2 je variance měřených zenitových úhlů.

První člen v (5) vyjadřuje vliv přesnosti měřených zenitových úhlů, druhý pak vliv přesnosti měřených délek (vliv konfigurace) na výsledek (tab. 3).

Tab. 4 Vypočtené výškové rozdíly

Spojnice (sklon v %)	4. 9. 01 h (m)			19. 4. 02 h (m)		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
1-2 (1,3 %)	-37,757	-37,762	-37,762	-37,756	-37,762	-37,757
2-3 (6,8 %)	-97,783	-97,781	-97,781	-97,779	-97,776	-97,778
3-1 (9,3 %)	135,540	135,543	135,543	135,536	135,538	135,536

Tab. 5 Výškové rozdíly vypočtené z oboustranně zaměřené spojnice a výsledky jejich vyrovnání podle MNČ

Spojnice	4. 9. 01		19. 4. 02	
	*h (m)	h (m) (MNČ)	*h (m)	h (m) (MNČ)
1-2	-37,762	-37,757	-37,762	-37,757
2-3	-97,773	-97,772	-97,780	-97,779
3-1	135,528	135,529	135,534	135,535
Σ *h	-0,007		-0,008	

3. Výsledky experimentálních měření

Pro lepší představu o možné velikosti vlivu vertikální složky refrakce podle Sanchezovy metody uvedeme výsledky z našeho měření zenitových úhlů ve svislém trojúhelníku, který patří do konfigurace výzkumné sítě ve Starém Městě pod Sněžníkem. Jednotlivé body jsou stabilizovány nivelačními kameny (body **1** a **2** jsou umístěny v extravilánu, bod **3** na okraji intravilánu). Do opracované hlavy kamene je shora osazena hřbová značka s otvorem, který představuje vlastní bod. Body tvoří podle předpokladu svislou rovinu (obr. 1).

V trojúhelníku byly zaměřeny oboustranně a současně zenitové úhly. Za měřickou jednotku bylo zvoleno zaměření zenitového úhlu na dvě symetrická rozhraní (černá x bílá) záměrného válce. Na každé rozhraní byly zaměřeny dvě laboratorní jednotky (každá sestává z 12 cílení) – viz [1] nebo [2]. Měření bylo provedeno 4. 9. 2001 za oblačného počasí teodolitem Theo 010B a dále 19. 4. 2002 za jasného dne elektronickým teodolitem Kern E2 (střední empirická chyba měřených zenitových úhlů odvozená z měření je $\sigma_z = 3''$). Šikmé délky byly určeny z měření GPS a jejich střední chyba z vyrovnání je $\sigma_s = 1,5$ mm.

Refrakční úhly vypočtené podle různé volby parametru z_6 jsou uvedeny v tab. 1. V tab. 2 jsou vypočteny refrakční koeficienty k (známá konstantní hodnota $k = 0,13$ určená Gausssem platí v našem případě pro obě záměry z bodu **3**).

Všechny trigonometrické výškové rozdíly z tab. 4 jsou vypočteny podle vzorce pro jednostranně zaměřený trigonometrický výškový rozdíl

$$h_{ij} = s_{ij} \cos(z_{ij}^* + \rho_{ij} - \varphi_{ij} / 2) / \cos(\varphi_{ij} / 2); \text{ platí } h_{ij} = -h_{ji}.$$

Pro úplnost jsou v tab. 5 vypočteny výškové rozdíly podle vzorce pro oboustranně zaměřený trigonometrický výškový

$$\text{rozdíl } {}^*h_{ij} = s_{ij} \sin \frac{z_{ji}^* - z_{ij}^*}{2} / \cos(\varphi_{ij} / 2); \text{ za předpokladu stejné}$$

refrakce na obou koncích záměry se její vliv vyloučí, což platí pro málo skloněné záměry – viz výsledky vypočtených refrakčních úhlů v tab. 1 pro oboustrannou záměru **1-2** i výškové rozdíly z tab. 4 a 5; u strmých stran (**1-3** a **2-3**) již nelze

předpokládat stejnou refrakci na obou koncích záměry a tedy rozdíly jsou větší.

4. Závěr

Podle našich dostupných informací se jedná o první experimentální ověření Sanchezovy metody na území České republiky. Svislý trojúhelník, který byl vytvořen v síti ve Starém Městě pod Sněžníkem není z hlediska tvarového zdaleka ideální (maximální výškový rozdíl 135 m na vzdálenost 1 460 m odpovídá přibližně 9 % sklonu záměry). Přesto se podařilo určit vzhledem k vysoké přesnosti měřených šikmých délek získaných metodou GPS ($\sigma_s = 1,5$ mm) refrakční úhly s přesností charakterizovanou střední chybou $\sigma_p \approx 8''$, což významně zvýšilo kvalitu trigonometricky určených výškových rozdílů a následně i nadmořských výšek na úroveň přesnosti dosahované v nivelačních sítích IV. řádu (podrobné výškové bodové pole).

Príspevek byl vypracován v rámci Výzkumného záměru MŠMT 210000007, Komplexní inovace technologií v geodézii a kartografii.

LITERATURA:

- [1] BLAŽEK, R.–SKOŘEPA, Z.: Geodézie 30 (Výškopis). Praha, ČVUT 1999.
- [2] HRADILEK, L.: Vysokohorská geodézie. Praha, Academia 1984.
- [3] MÍKA, S.: Numerické metody algebry. Praha, SNTL 1985.
- [4] WUNDERLICH, T.: Die voraussetzungsfree Bestimmung von Refraktionswinkeln. Wien, Technische Universität 1985, Heft 26, s. 71–77.

Do redakce došlo: 19. 11. 2002

Lektoroval:
Ing. Jan Řezníček, Ph.D.,
Zeměměřický úřad,
Praha