Teorie chyb a vyrovnávací počet 1

Téma č. 5: **Metoda nejmenších čtverců.**
Vyrovnání měření zprostředkujících s podmínkami.

1. **Formulace úlohy.**
2. **Odvození postupu výpočtu.**
3. **Směrodatné odchylky.**
4. **Příklady.**

Metoda nejmenších čtverců. Vyrovnání měření podmínkových.

1. Formulace úlohy.

Ve vyrovnání zprostředkujících je třeba pro neznámé splnit další matematické podmínky. Pak pro měření platí vztahy:

$$\bar{\boldsymbol{l}} = \bar{\boldsymbol{l}}\left(\boldsymbol{x}^T\right) \quad \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}^T\right) = 0$$

Vztahy lze jednotlivě „zpracovat“ jako při vyrovnání zprostředkujících a podmínkových až na linearizované:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}'$$

$$\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{b} = 0 \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{x}_0^T\right)$$

1. Formulace úlohy.

Označení:

Měření: $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$

Neznámé: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Funkční vztah: $l_i = f_{li}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Opravy: $v_i = \bar{l}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - l_i$

$\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{x}^T) - \boldsymbol{l}$

Podmínkové rov.: $\boldsymbol{\varphi}(\bar{\boldsymbol{x}}^T) = \mathbf{0}$

Uzávěry: $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}^T) = \boldsymbol{u}$

Přetvořené podmínkové rovnice (linearizace):

$$\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

2. Odvození postupu výpočtu.

Podmínku MNČ s vedlejšími podmínkami budeme řešit již známým Lagrangeovým postupem:

$$\overline{\Omega} = \boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} + 2 \cdot \boldsymbol{k}^T \cdot \left(\boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{b}\right) = min.$$

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial \boldsymbol{dx}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \boldsymbol{dx}^T}\right)^T \cdot 2 \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v} + 2 \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{\Omega}}{\partial k} = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{b} = 0$$

$$\boldsymbol{A}^T \cdot 2 \cdot \boldsymbol{P} \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{l}') + 2 \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{k} + \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' = 0$$

2. Odvození postupu výpočtu.

Systém normálních rovnic:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{dx} \quad &+\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{k} \quad +\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' &= 0 \\ \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{dx} \quad & \qquad\qquad\qquad +\boldsymbol{b} &= 0 \end{aligned}$$

Který zapíšeme:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{dx} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = 0$$

Řešení je dále standartní:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{dx} \\ \boldsymbol{k} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{l}' \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

3. Směrodatné odchylky.

Směrodatná odchylka jednotková

$$s_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{v}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{v}}{n+r-k}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n+r-k}}$$

Směrodatné odchylky vyrovnaných neznámých :

$$\boldsymbol{M_x} = \sigma_0^2 \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}^{-1} = \sigma_0^2 \cdot \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{Q}}_{xx} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{kx}^T \\ \overline{\boldsymbol{Q}}_{kx} & \overline{\boldsymbol{Q}}_{kk} \end{pmatrix}$$

Platí vzorce vyrovnání zprostředkujících, jen je třeba uvážit submatice pro koreláty.

4. Příklad.

☺ Konec ☺